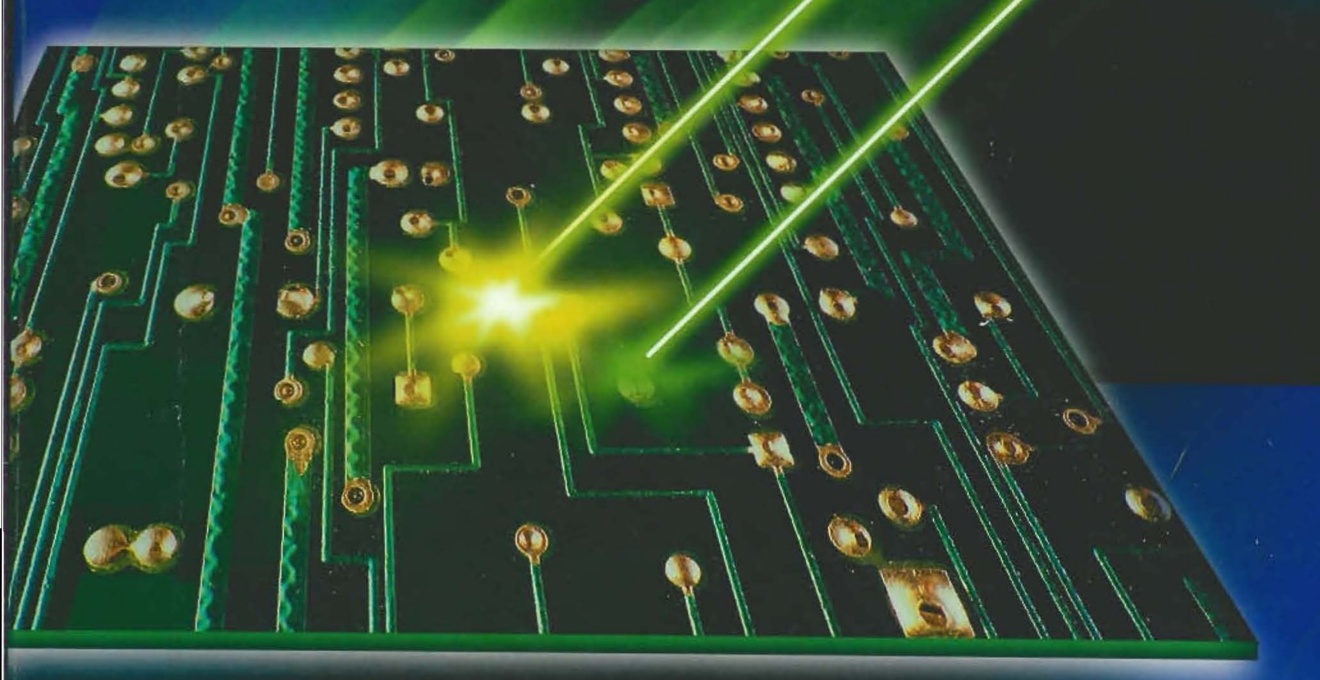


Teoría de control

Diseño electrónico

Spartacus Gomáriz Castro
Domingo Biel Solé
José Matas Alcalá
Miguel Reyes Moreno



Alfaomega



EDICIONS **UPC**

Teoría de control

Diseño electrónico

Spartacus Gomáriz Castro
Domingo Biel Solé
José Matas Alcalá
Miguel Reyes Moreno

Obra galardonada por la UPC





Presentación

El presente libro pretende formar al ingeniero en el campo de la ingeniería de control; con esta finalidad, se presentan los conceptos básicos de la teoría de control aplicables a sistemas analógicos y discretos, unificando ambos dominios desde un mismo punto de vista. El libro añade una serie de ejemplos y problemas resueltos en cada capítulo que capacitan al lector para realizar el análisis y diseño de diversos sistemas de control. Por este motivo, la presente obra sirve tanto para la formación del estudiante de ingeniería como de soporte y apoyo al profesional de la industria.

Para el desarrollo de la obra, se aprovecha la experiencia docente adquirida por los autores durante los últimos cinco años en las asignaturas anuales de Servotecnia y Servosistemas, en la especialidades de Ingeniería Técnica de Telecomunicaciones e Industrial, respectivamente, de la Escuela Universitaria Politécnica de Vilanova i la Geltrú. Se ha tenido en cuenta, además, que la obra tiene plena aplicación en las nuevas titulaciones que se están implantando al respecto con los nuevos planes de estudio.

El objetivo fundamental de la obra ha sido dar un enfoque a la teoría de control para que su tratamiento no sea una ciencia aislada, sino que incorpore un enlace con las técnicas más actuales, tales como la instrumentación y el control industrial, introduciendo para ello tanto las nuevas herramientas de programación gráfica, que constituyen lo que se ha venido a denominar *instrumentación virtual*, como los sistemas de control más habituales en el entorno industrial, como son los microcontroladores, microprocesadores y autómatas programables (PLC's).

Con el fin de alcanzar correctamente el anterior objetivo, esta obra se compone de seis capítulos que se describen a continuación :

- En el primer capítulo se realiza un enfoque general de los sistemas de control de tiempo continuo y discreto, introduciendo el modelado de los mismos para facilitar su comprensión y análisis.
- El segundo capítulo amplía la base de conocimientos sobre los sistemas de control de tiempo continuo y discreto, centrándose en las técnicas de análisis en el dominio del tiempo, por lo que este capítulo constituye un factor clave en la realización del diseño.
- En el tercer capítulo se llevan a la práctica el conjunto de conocimientos adquiridos en los capítulos anteriores, exponiendo con claridad el diseño de los sistemas de control más característicos en el dominio temporal.
- En el cuarto capítulo se introduce la metodología clásica de análisis de sistemas de control en el dominio frecuencial, exponiendo en el quinto capítulo la metodología de diseño pertinente para estos sistemas, así como realizando los ejemplos y problemas ilustrativos.

- El capítulo sexto es el tema con mayor enfoque práctico, donde se aplica de forma empírica la mayor parte de los conceptos explicados en los capítulos anteriores, incluyendo la implementación práctica de los diseños realizados, empleando para ello los circuitos electrónicos necesarios, y considerando las técnicas más recientes de instrumentación virtual.

Conceptualmente, esta obra cumple los objetivos planteados en su inicio, por lo que representa un nuevo modo de enfrentarse con las técnicas clásicas de diseño de sistemas de control, contribuyendo a una exposición clara y concisa de los conceptos teóricos y teniendo la capacidad de ofrecer distintas visiones de las metodologías clásicas de diseño más conocidas.

La razón y motivo principal que han condicionado el desarrollo y consecución de este libro ha sido la voluntad de ofrecer una visión amplia y global de las técnicas de control y facilitar al lector de esta obra la comprensión de las ideas y conceptos más importantes. Nuestro más profundo deseo es que esta obra le sea útil como instrumento de soporte y consulta.

Los autores

Vilanova i la Geltrú

Contenido

1. Introducción a los sistemas de control

4. Análisis frecuencial de sistemas de control

5. Diseño de sistemas de control en el dominio frecuencial

6. Realización electrónica de sistemas de control

1. Introducción a los sistemas de control

Desde el punto de vista de la teoría de control, un sistema o proceso está formado por un conjunto de elementos relacionados entre sí que ofrecen señales de salida en función de señales o datos de entrada.

Es importante resaltar el hecho de que no es necesario conocer el funcionamiento interno, o cómo actúan entre sí los diversos elementos, para caracterizar el sistema. Para ello, sólo se precisa conocer la relación que existe entre la entrada y la salida del proceso que realiza el mismo (principio de caja negra). El aspecto más importante de un sistema es el conocimiento de su dinámica, es decir, cómo se comporta la señal de salida frente a una variación de la señal de entrada. Un conocimiento preciso de la relación entrada/salida permite predecir la respuesta del sistema y seleccionar la acción de control adecuada para mejorarla. De esta manera, el diseñador, conociendo cuál es la dinámica deseada, ajustará la acción de control para conseguir el objetivo final.

En vista de todo lo expuesto, se puede definir un sistema de control como el conjunto de elementos que interactúan para conseguir que la salida de un proceso se comporte tal y como se desea, mediante una acción de control.

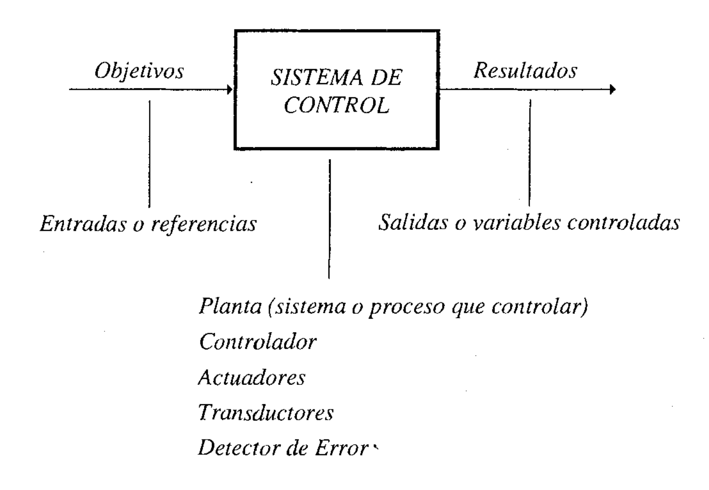


Fig. 1.1 Diagrama de un sistema de control

1.1 Tipos de señales y sistemas

Consideraremos como señales las variaciones a lo largo del tiempo de las entradas o salidas de un sistema. Obviamente, estas señales pueden ser de distinta naturaleza, y por tanto sus unidades físicas pueden ser diversas. Según cómo sea la variación de estas señales, podemos clasificarlas dentro de dos grandes grupos: señales analógicas y señales discretas.

- Señales analógicas: Son aquellas cuya variación, tanto en amplitud como a lo largo del tiempo, es continua. Es decir, pueden tomar cualquier valor real, en cualquier instante de tiempo.

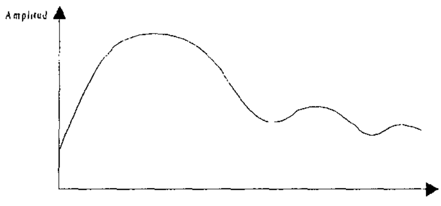


Fig. 1.2 Señal analógica

- Señales discretas: Este tipo de señales no tiene una variación continua como las anteriores, sino que su evolución se rige por un determinado conjunto finito de valores posibles. Según dónde tome este conjunto de valores, podremos distinguir entre señales discretas en amplitud o discretas en tiempo.

  - Señales discretas en tiempo: Sólo tienen valor en instantes de tiempo predeterminados. Y aunque su amplitud puede ser cualquier valor dentro del rango de los reales, el valor de la señal entre dos instantes de tiempo consecutivos no está definido.

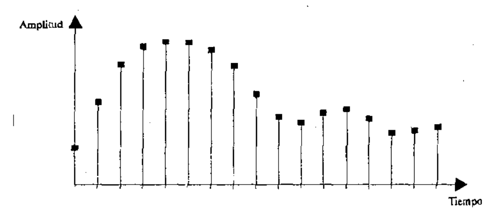


Fig. 1.3 Señal discreta en tiempo

  - Señales discretas en amplitud: En este caso, la señal toma valor en cualquier instante de tiempo, pero estos valores de amplitud pueden encontrarse entre los definidos en el conjunto predeterminado.

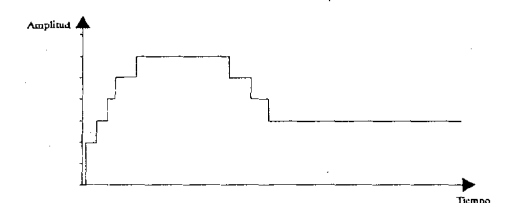


Fig. 1.4 Señal discreta en amplitud

- Señales discretas en amplitud y tiempo: Son una mezcla de los dos tipos anteriores, es decir, la señal sólo podrá tomar valores predeterminados en instantes de tiempo predeterminados.

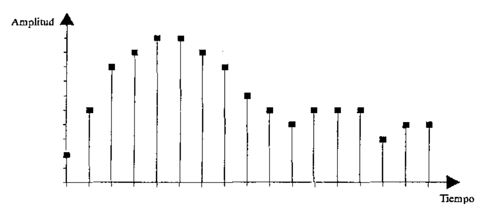


Fig. 1.5 Señal discreta en amplitud y tiempo

1.2 Sistemas combinacionales y secuenciales

Los sistemas combinacionales y secuenciales pueden clasificarse como sistemas de control basados en instrucciones lógicas. Los datos de entrada y salida al sistema son binarios e indican que los sensores tienen dos estados o valores (por ejemplo: válvula abierta o cerrada, un indicador activado o no, o un interruptor pulsado o no). Las decisiones tomadas por el sistema de control son del tipo *on/off* y se basan en las condiciones de los datos de entrada.

1.3 Sistemas de control dinámico. Sistemas en lazo abierto y sistemas en lazo cerrado

Dependiendo del tratamiento que el sistema de control realiza con la señal de salida, pueden distinguirse dos topologías de control generales: sistemas en lazo abierto y sistemas en lazo cerrado.

1.3.1 Sistemas en lazo abierto

En este tipo de sistemas, la salida no tiene efecto alguno sobre la acción de control.



Fig. 1.6 Diagrama de bloques de un sistema en lazo abierto

En un sistema en lazo abierto, la salida no se compara con la entrada de referencia, por ello cada entrada corresponderá a una operación prefijada sobre la señal de salida. Se puede asegurar entonces que la exactitud del sistema depende en gran manera de la calibración del mismo y, por tanto, la presencia de perturbaciones en la cadena (señales indeseadas) provocará que éste no cumpla la función asignada.

Para poder considerar una topología en lazo abierto, es necesario conocer la relación entrada/salida y garantizar la inexistencia de perturbaciones externas o de variaciones de los parámetros internos del sistema. Esto es, en general, difícil de cumplir en la práctica, y su realización implica sistemas excesivamente caros.

Un ejemplo de este tipo de topología se puede encontrar en el control de un cabezal de máquina de escribir electrónica. En este sistema, la entrada viene dada por el teclado; la señal generada por éste se procesa y se genera la acción de control, que provocará, como salida, la rotación del cabezal a la posición adecuada y la impresión de la letra deseada.

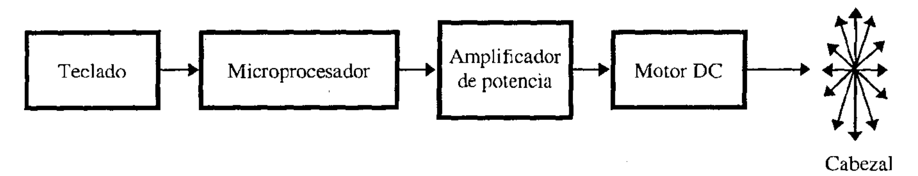


Fig. 1.7 Diagrama de bloques del control de un cabezal de impresión

Como se puede suponer, una perturbación de origen externo puede falsear la señal en cualquier punto de la cadena y como resultado obtendremos una salida diferente de la deseada.

1.3.2 Sistemas en lazo cerrado

En los sistemas de control en lazo cerrado, la señal de salida tiene efecto sobre la acción de control. A este efecto se le denomina *realimentación*.

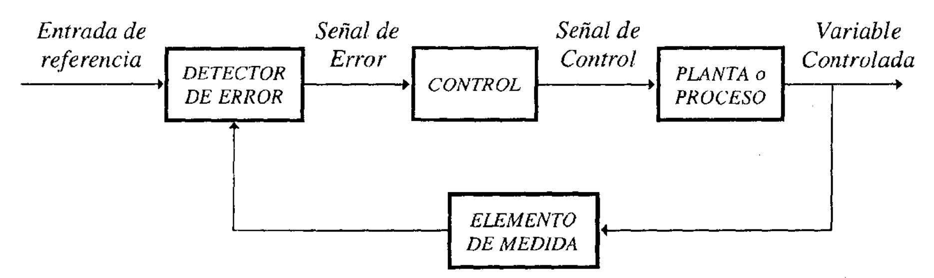


Fig. 1.8 Diagrama de bloques de un sistema de control en lazo cerrado

La señal controlada debe realimentarse y compararse con la entrada de referencia, tras lo cual se envía a través del sistema una señal de control, que será proporcional a la diferencia encontrada entre la señal de entrada y la señal medida a la salida, con el objetivo de corregir el error o desviación que pudiera existir.

La principal ventaja de los sistemas de control en lazo cerrado es que el uso de la realimentación hace al conjunto menos sensible a las perturbaciones externas y a las variaciones de los parámetros internos que los sistemas en lazo abierto.

1.4 Caracterización de un sistema lineal invariante en el tiempo

1.4.1 Modelo de un sistema

Un sistema físico puede caracterizarse dinámicamente a través de las ecuaciones diferenciales que describen las leyes físicas que rigen el comportamiento de dicho sistema.

Se debe de tener en cuenta que una descripción completa y precisa del sistema físico puede resultar demasiado compleja y laboriosa; por ello debemos modelar el sistema llegando a un compromiso entre la exactitud y la sencillez requeridas al sistema. En cualquier caso se debe garantizar que el modelo obtenido responda a las exigencias iniciales del estudio, pues ello determina el rango de validez de un modelo (por ejemplo: alta frecuencia en un estudio circuital). De hecho, un modelo será válido mientras se cumplan las hipótesis que han permitido simplificarlo.

Por último, ha de indicarse que el campo de estudio del modelado de sistemas se encuentra actualmente en fase de determinación de las reglas de identificación de sistemas, utilizándose para ello software de alto nivel.

1.4.2 Clasificación de sistemas

Los sistemas pueden clasificarse en sistemas lineales y no lineales; otra posible clasificación los divide en sistemas variantes o invariantes en el tiempo.

* Sistemas lineales: son aquellos que pueden describirse mediante ecuaciones diferenciales lineales. La propiedad más importante es que permiten el principio de superposición. Esta propiedad puede utilizarse para determinar de un modo experimental si un sistema es o no lineal.

* Sistemas no lineales: son aquellos que no son lineales; es decir, se caracterizan por ecuaciones diferenciales no lineales. En realidad todo sistema es no lineal, aunque la mayoría es linealizable a tramos (circunstancia que se utiliza para poder caracterizar un sistema no lineal como uno lineal en un entorno determinado). En este tipo de sistemas, el principio de superposición no es aplicable.

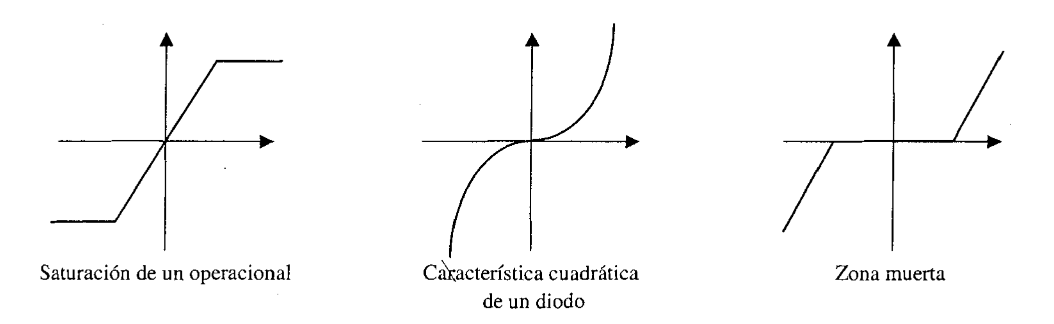
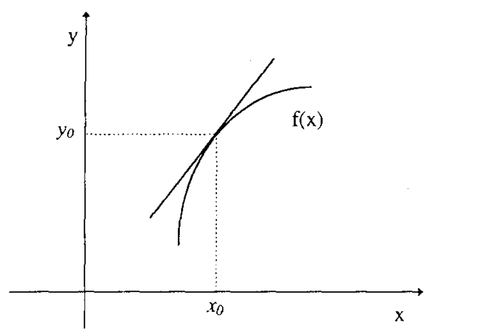


Fig. 1.9 Ejemplos de sistemas no lineales



Linealización:

Dada una función no lineal y = f(x), su linealización en el entorno de un determinado punto de trabajo (x_0, y_0) se obtiene de la forma siguiente:



$$\text{donde}\quad y - y_0 = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)\Bigg|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)$$

Que coincide con la ecuación de la recta de pendiente igual a la derivada de la función no lineal en el punto (x_0, y_0), y que pasa por dicho punto. Debe observarse que la diferencia entre la recta y la función no lineal indica el rango de validez del modelo, es decir, la tolerancia permitida debe ser mayor que dicha diferencia.

1.4.3 Función de transferencia

En general, cualquier sistema lineal invariante en el tiempo (*SLIT*) puede modelarse mediante una ecuación diferencial de la forma:

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + ...+ a_n\, y = b_0\, x^{(m)} + b_1\, x^{(m-1)} + b_2\, x^{(m-2)} + ...+ b_m\, x$$
$$\text{donde:}\quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n} \quad ;\quad n \geq m \qquad (1.1)$$

Esta ecuación diferencial relaciona la señal de salida y(t) de un sistema con la señal de entrada x(t) al mismo, y permite conocer la respuesta de dicho sistema a una señal de entrada determinada, mediante su resolución. A esta ecuación diferencial se le denomina *ecuación característica del sistema.*

Sin embargo, el tratamiento analítico del sistema a través de la ecuación característica diferencial es, en general, complejo. Es por ello que se introduce el concepto de *función de transferencia.*

La función de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo se obtiene realizando la transformada de Laplace de la ecuación característica del sistema, con condiciones iniciales nulas.

Ecuación característica:

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + ...+ a_n\, y = b_0\, x^{(m)} + b_1\, x^{(m-1)} + b_2\, x^{(m-2)} + ...+ b_m\, x \qquad (1.2)$$

$$\text{TL}\big/_{CI=0}:$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{b_0\, s^m + b_1\, s^{m-1} + ...+ b_m}{a_0\, s^n + a_1\, s^{n-1} + ...+ a_n} \qquad (n \geq m) \tag{1.3}$$

donde n ≡ orden del sistema

Modelo del sistema:



Función de transferencia: $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ con CI = 0

La función de transferencia 'contiene' toda la información de la dinámica del sistema.

En concreto, la característica dinámica del sistema depende fundamentalmente de las raíces del denominador de la función de transferencia; estas raíces se denominan polos de la función de transferencia. Al polinomio obtenido en el denominador de una función de transferencia se le denomina *polinomio característico.*

Para que un sistema sea físicamente realizable, el orden del denominador debe ser mayor o igual (de hecho en la práctica siempre es mayor) que el orden del numerador, de este modo se garantiza que el sistema es causal.

Ejemplo 1.1

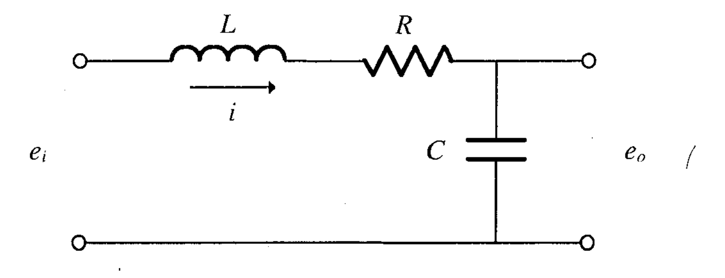


Fig. 1.10 Circuito RLC

Para obtener la función de transferencia del circuito de la figura deberán seguirse los siguientes pasos:

1.- Plantear las ecuaciones diferenciales que definen cada elemento, esto es, aquellas que se obtienen a partir de las leyes físicas que rigen el comportamiento del sistema.

$$\left\{\begin{array}{l} e_i = L\cdot\dfrac{di}{dt} + R\cdot i + e_o \\ i = C\cdot\dfrac{de_o}{dt} \end{array}\right. \Rightarrow e_i = LC\cdot\frac{d^2 e_o}{dt^2} + RC\cdot\frac{de_o}{dt} + e_o$$

2.- Aplicar la transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas.

$$TL\big/_{CI = 0} \Rightarrow Ei(s) = \left[LC\cdot s^2 + RC\cdot s + 1\right]\cdot Eo(s) \Rightarrow \frac{Eo(s)}{Ei(s)} = \frac{1}{LC\cdot s^2 + RC\cdot s + 1}$$

Debe observarse que la descripción de un sistema mediante su función de transferencia permite asignar características temporales a la posición de los polos en el plano S, lo cual proporciona mayor versatilidad que la descripción mediante la ecuación diferencial característica. Así, por ejemplo, puede afirmarse que el sistema tiene un comportamiento como oscilador cuando R=0, dado que, en este caso, sus raíces son imaginarias puras.

$$R = 0 \Rightarrow \frac{Eo(s)}{Ei(s)} = \frac{1}{LC\cdot s^2 + 1} = \frac{1}{\left(s + j\sqrt{LC}\right)\cdot\left(s - j\sqrt{LC}\right)}$$

Por último, resaltar que la función de transferencia no ofrece información sobre la estructura física del sistema, con lo cual diversos sistemas físicos pueden tener la misma función de transferencia, aplicándose, de este modo, el concepto de sistema análogo. Los sistemas análogos son útiles cuando alguno de los sistemas es complejo, caro, frágil o de respuesta muy lenta (por ejemplo, en aplicaciones con prototipos electrónicos).

1.5 Características de un sistema de control de tiempo continuo

1.5.1 Topología en lazo abierto

Sist. Control

R(s) → [$G_{LA}(s)$] → *C(s)*

Entrada *Salida*

$$GLA(s) = \frac{C(s)}{R(s)} \quad \text{(relación entrada / salida)}$$

Recordemos que un sistema de control, generalmente estará formado por diversos sistemas (planta, control, etc.). La topología típica en sistemas en lazo abierto es:

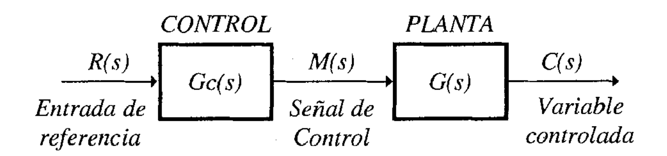


Fig. 1.11 Diagrama de bloques de un sistema en lazo abierto

Obteniéndose: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{M(s)}{R(s)} \cdot \frac{C(s)}{M(s)} = Gc(s) \cdot G(s)$ como función de transferencia del sistema. (1.4)

1.5.2 Topología en lazo cerrado

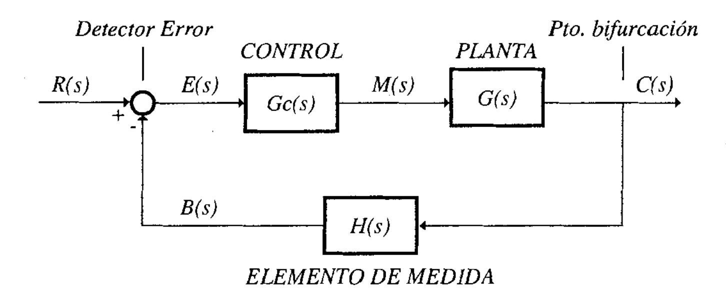


Fig. 1.12 Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado

El detector de error produce una señal resultante de la diferencia existente entre la referencia de entrada y la señal de realimentación del sistema (realimentación negativa). La señal originada en el detector de error se denomina *señal de error.*

El punto de bifurcación permite trasladar la señal de salida al punto de entrada, efectuando así la realimentación deseada.

El elemento de medida es un transductor o sensor que mide el valor de la señal de salida y adapta la naturaleza sus características a las necesarias para poder realizar la comparación con la señal de referencia (Ejemplo.: No podemos comparar la velocidad de un motor si la señal de referencia es eléctrica, debemos realizar una conversión velocidad-tensión). Generalmente, sus características dinámicas son más rápidas que las propias del sistema que se debe controlar (adquisición de señal mucho más rápida que la dinámica propia del sistema); en este caso se puede considerar H(s) = k; en el caso k =1 se dice que existe realimentación unitaria; si no fuese así, deberíamos considerar las características dinámicas del elemento de medida a través de su función de transferencia H(s).

Definiciones:

1. Función de transferencia en lazo abierto (ganancia de lazo):

$$G_{LA}(s) = \frac{B(s)}{E(s)} = Gc(s) \cdot G(s) \cdot H(s) \qquad (1.5)$$

2. Función de transferencia directa:

$$G_D(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = Gc(s) \cdot G(s) \tag{1.6}$$

3. Función de transferencia en lazo cerrado:

$$G_{LC}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Gc(s) \cdot G(s)}{1 + Gc(s) \cdot G(s) \cdot H(s)} = \frac{G_D(s)}{1 + G_{LA}(s)} \tag{1.7}$$

Cabe destacar, por último, que en el caso para el cual se cumpla que la ganancia de la función de transferencia directa es alta (Gc(s)·G(s) >> 1) y se posea realimentación unitaria (H(s) = 1), la señal de salida y la señal de entrada son iguales, lo cual proporciona una robustez muy importante frente a perturbaciones externas y variaciones de parámetros internos:

* Sistema en lazo cerrado sometido a una perturbación:

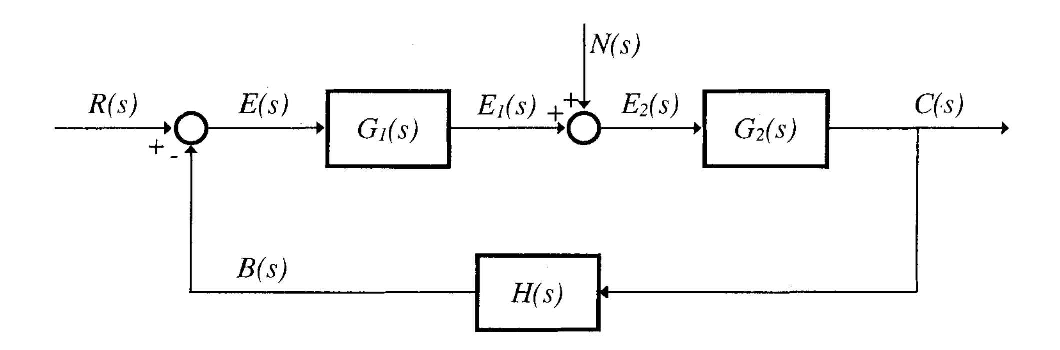


Fig. 1.13 Perturbación externa representada por N(s)

Aplicando superposición, se obtiene la señal de salida:

$$C(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s) + \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot R(s) \tag{1.8}$$

Comparando con la salida que se obtendría en lazo abierto:

$$C(s) = G_2(s) \cdot N(s) + G_1(s)G_2(s) \cdot R(s) \tag{1.9}$$

Se observa como se ha reducido la sensibilidad del sistema frente a perturbaciones externas; en concreto, si la ganancia de lazo es elevada, la señal de salida depende exclusivamente de la función de transferencia de la realimentación, aunque ello puede acarrear problemas de estabilidad adicionales.

* Reducción de la sensibilidad frente a variaciones internas.

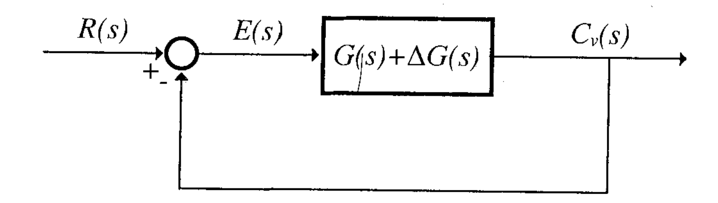


Fig. 1.14 Variaciones internas de la función de transferencia representadas por ΔG(s)

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$C_\upsilon(s) = C(s) + \Delta C(s) = \frac{G(s)+\Delta G(s)}{1+\Delta G(s)+G(s)} \cdot R(s) \approx \frac{G(s)}{1+G(s)} \cdot R(s) + \frac{\Delta G(s)}{1+G(s)} \cdot R(s) \qquad (1.10)$$

así: $\Delta C(s) = \frac{\Delta G(s)}{1+G(s)} \cdot R(s)$, que es menor que el efecto que obtendríamos en el caso del sistema en lazo abierto ($C_v(s)|_{LA} = C(s) + \Delta C(s) = R(s) \cdot G(s) + \Delta G(s) \cdot R(s)$), reduciéndose de este modo la sensibilidad del sistema frente a variaciones de parámetros internos. De hecho, un sistema en lazo abierto exige componentes más precisos, mejor calibración y es, por lo tanto, más caro.

1.6 Diagrama de bloques

Características de un diagrama de bloques:

1- Es una representación gráfica del flujo de señales y de la función realizada por cada componente de un sistema.

2- Refleja una característica unilateral (salida/entrada).

3- Dado un diagrama de bloques, el sistema al cual representa no es único, ya que contiene información respecto a su comportamiento dinámico y no sobre su constitución interna.

4- El diagrama de bloques de un sistema dado no es único (depende de la definición de variables internas); sin embargo, la función de transferencia resultante sí es única.

Técnicas de trazado del diagrama de bloques:

1- Describir las ecuaciones diferenciales de cada componente del sistema.

2- Aplicar la transformada de Laplace con condiciones nulas.

3- Representar individualmente el diagrama de bloques de cada ecuación diferencial.

4- Unir los bloques a través de sus variables de entrada y salida.

Ejemplo 1.2

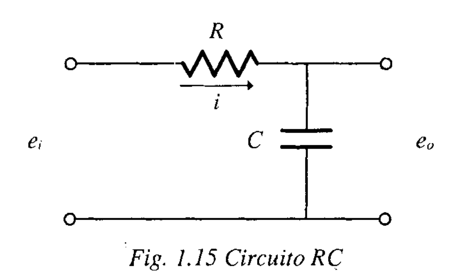


Fig. 1.15 Circuito RC

1.- Plantear las ecuaciones diferenciales.

$$\begin{cases} i = \dfrac{e_i - e_o}{R} \\ e_o = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i \cdot dt \end{cases}$$

2.- Aplicar la transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas.

$$\begin{cases} I(s) = \dfrac{E_i(s) - E_o(s)}{R} \\ E_o(s) = \dfrac{1}{Cs} \cdot I(s) \end{cases}$$

3.- Representación individual.

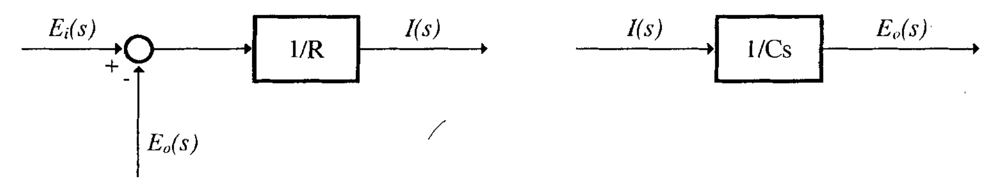


Fig. 1.16 Representación de las transformadas como funciones de transferencia

4.- Unir bloques individuales.

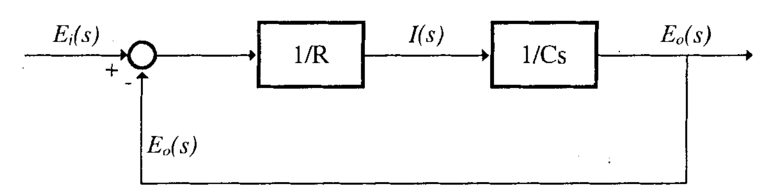


Fig. 1.17 Diagrama de bloques global del sistema

Con lo cual la función de transferencia resulta: $\dfrac{E_o(s)}{E_i(s)} = \dfrac{1/RCs}{1 + 1/RCs} = \dfrac{1}{RCs+1}$

Debe observarse que la metodología presentada exige una ordenación adecuada de las variables intermedias, de manera que la posterior unión de los diagramas individuales pueda realizarse de un modo simple; de hecho, es necesario que las variables intermedias aparezcan sólo una vez como resultado de un diagrama de bloques individual.

Álgebra de bloques:

El conjunto de reglas que permiten simplificar la estructura de un diagrama de bloques se denomina álgebra de bloques; debe indicarse que, al aplicar dichas reglas, el diagrama resultante es más simple, pero los nuevos bloques individuales son más complejos. Para aplicar adecuadamente álgebra de bloques, es necesario verificar que el producto de funciones de transferencia en sentido directo o en un lazo se mantenga constante tras la operación efectuada.

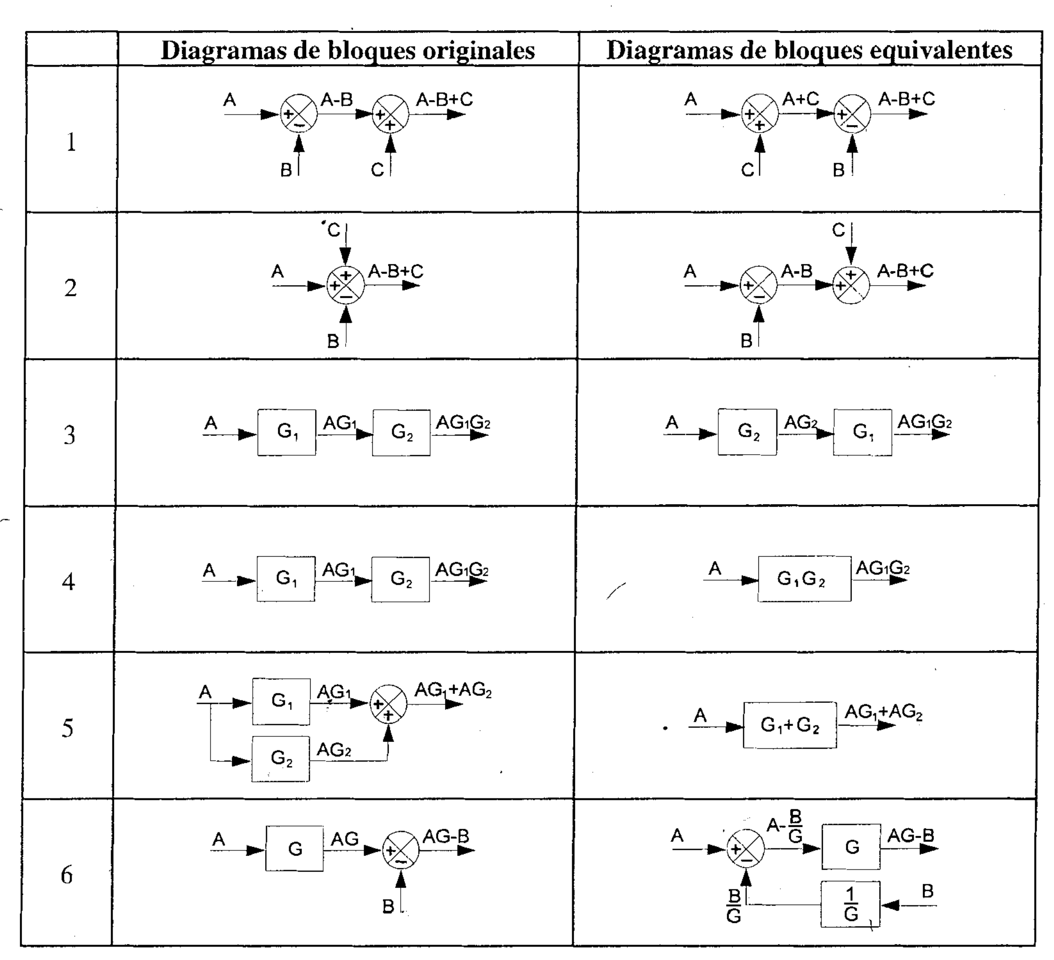


Fig. 1.18 Reglas del álgebra de diagramas de bloques

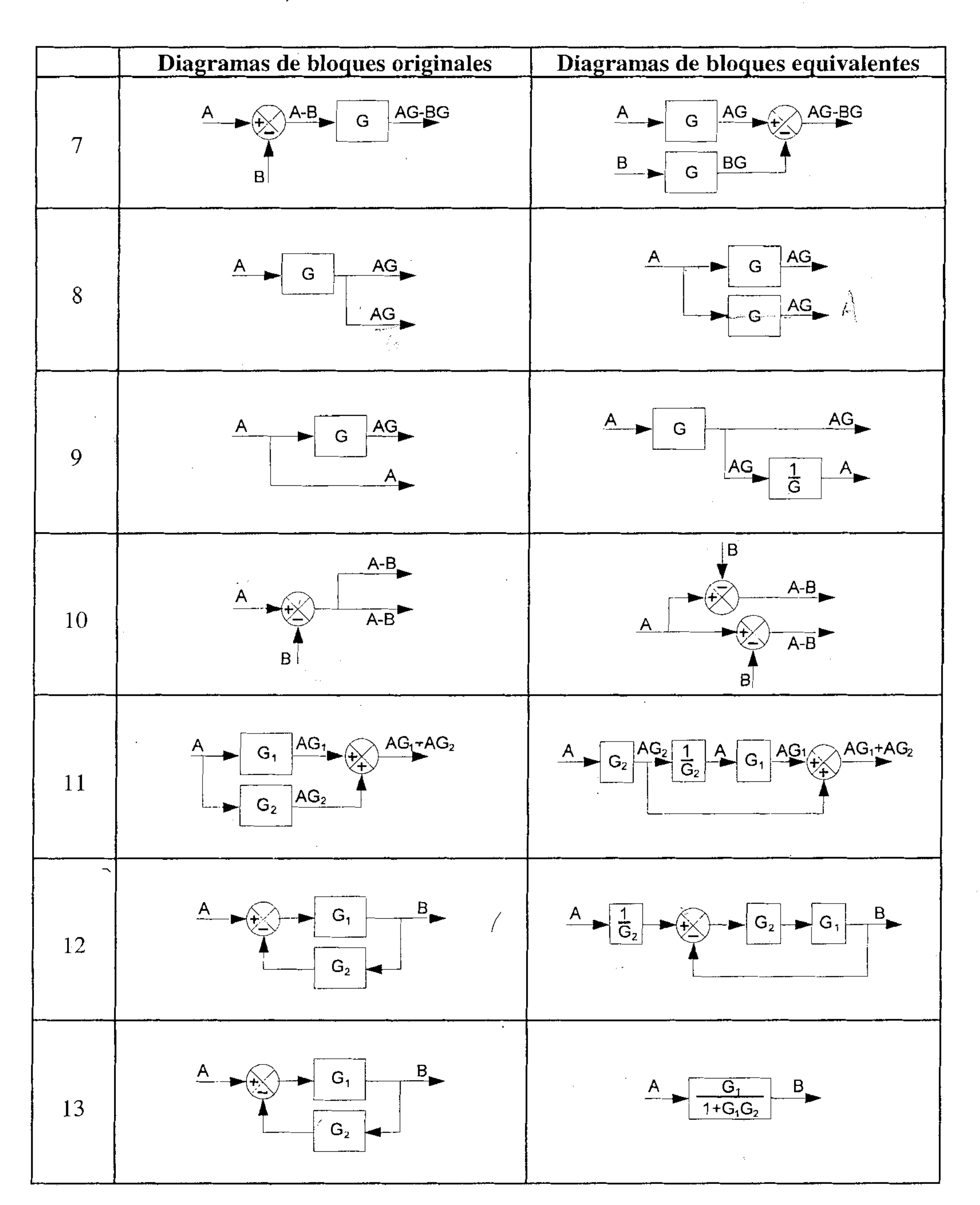


Fig. 1.19 Reglas del álgebra de diagramas de bloques (continuación)

Metodología usual de síntesis:

1.- Desplazar puntos de bifurcación y puntos de suma.

2.- Intercambiar punto de suma.

3.- Reducir los lazos internos de realimentación.

Ejemplo 1.3

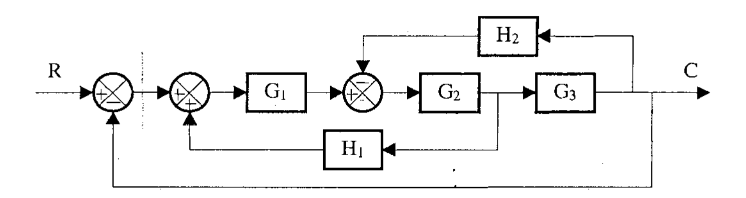


Fig. 1.20 Diagrama de bloques de múltiples lazos

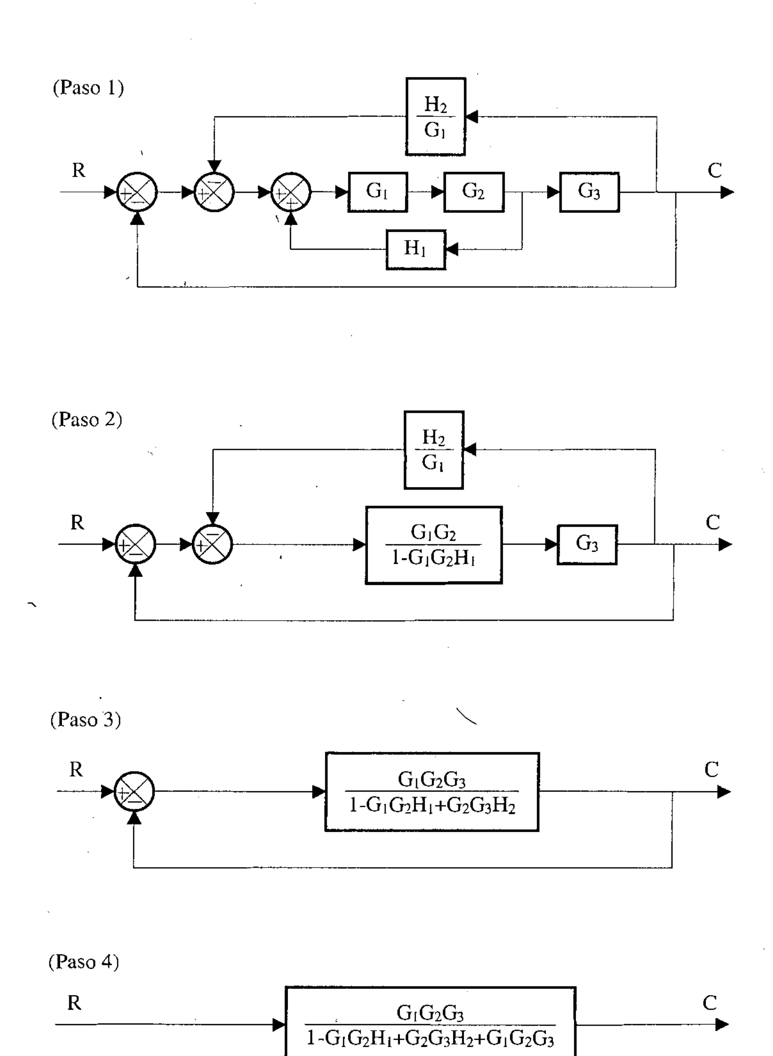


Fig. 1.21 Reducción sucesiva del diagrama de bloques de múltiples lazos

1.7 Sistemas de control en tiempo discreto

Un sistema de control en tiempo discreto se caracteriza principalmente por realizar un procesado, mediante alguno de sus elementos, de señales discretas en el tiempo. La topología típica de un sistema discreto es la que se puede observar en la figura siguiente:

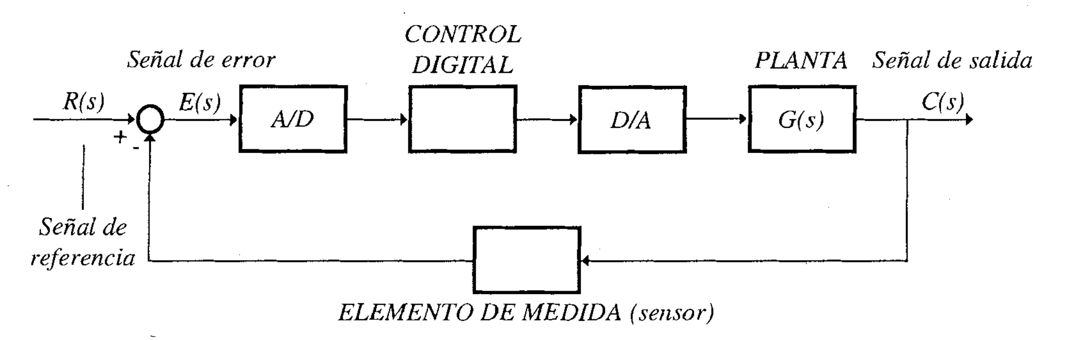


Fig. 1.22 Diagrama de bloques de un sistema de control discreto

Respecto a los sistemas analógicos se observa la inclusión de algunos elementos nuevos:

* Control digital o discreto: Sistema procesador diseñado para que el sistema de control logre las especificaciones requeridas. Este sistema trabaja u opera en instantes de tiempo predeterminados, múltiplos del periodo de muestreo y es, por tanto, un sistema síncrono. La operatividad del sistema o su funcionamiento de procesado queda caracterizada plenamente mediante su *ecuación en diferencias*:

x(n) → CONTROL DIGITAL → y(n), t = n·T

$$y(n) = \sum_{p=1}^{P} a(p)\cdot y(n-p) + \sum_{q=0}^{Q} b(q)\cdot x(n-q) \qquad (1.11)$$

donde: $y(n) \equiv$ muestras de salida del sistema procesador.

$x(n) \equiv$ muestras a la entrada del sistema procesador.

* Necesidad de interfaces A/D y D/A para convertir señales continuas en señales discretas y señales discretas en señales continuas, respectivamente. Permiten la introducción de un procesador discreto en el sistema de control y reconstruyen temporalmente la señal discreta en una señal continua en el tiempo.

La topología anterior es típica en sistemas discretos; sin embargo, no es la única topología posible. Una alternativa a la anterior se caracterizaría con el siguiente diagrama de bloques:

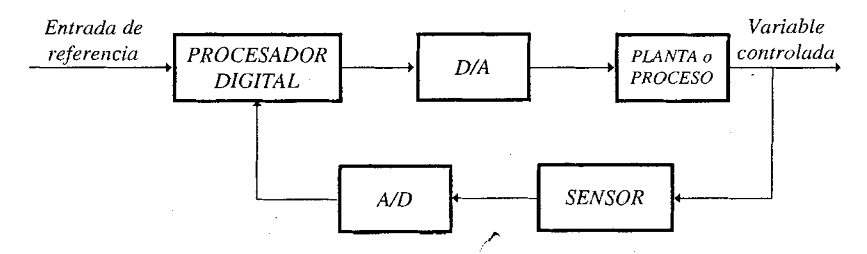


Fig. 1.23 Diagrama de bloques alternativo de un sistema discreto

En este caso el procesador digital incluye el detector de error y el control discreto del sistema. Debe observarse también que, en este caso, la señal de referencia es una señal digital, a diferencia de la topología anterior, que poseía una señal de referencia analógica. Sin embargo, la caracterización del sistema se puede realizar del mismo modo que en el caso anterior.

Debe observarse que el periodo de muestreo T depende fundamentalmente del tiempo de ciclo del programa que ejecuta el algoritmo de control; así, normalmente el tiempo de ciclo de programa suele ser mayor que el periodo de muestreo de los conversores A/D. En algunos casos, el periodo de muestreo se diseña para que sea mayor que el tiempo de ciclo (cuando las constantes de tiempo del proceso o planta son muy grandes), utilizándose el resto de tiempo del procesador para realizar funciones de transmisión y representación de datos o, simplemente, funciones de gestión de posibles alarmas.

Ventajas del muestreo en sistemas de control:

- Mayor facilidad de realización.
- No existen derivas (ruido, interferencias, etc.).
- Son más compactos, menos pesados.
- Menor coste.
- Flexibilidad de programación.

1.8 Muestreo y reconstrucción

Se ha indicado previamente la necesidad de incluir dos sistemas importantes en un sistema de control en tiempo discreto:

* A/D: elemento encargado de muestrear, mantener y codificar la señal continua para lograr una señal digital que actuará como señal de entrada del controlador digital. Su estructura interna típica es:

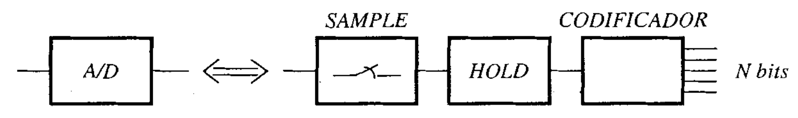


Fig. 1.24 Estructura interna del bloque A/D

* D/A: elemento encargado de decodificar y reconstruir la señal digital para lograr una señal continua en el tiempo que actuará como señal de entrada de la planta analógica. En general, no es deseable aplicar una señal muestreada a una planta analógica debido a los componentes inherentes de alta frecuencia presentes en la señal discreta. Por esta razón, al elemento reconstructor también se le denomina *filtro de alisado*.

Observando la topología típica de sistemas de control en tiempo discreto, surge la necesidad de caracterizar los procesos del muestreo y reconstrucción de las señales, con el propósito de facilitar su análisis.

* Caracterización del muestreo ideal: se define el muestreador ideal como un sistema que efectúa la siguiente operación con la señal continua:

$$e^{*}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e(t) \cdot \delta(t - kT) \qquad (1.12)$$

donde:

- $e^{*}(t) \equiv$ señal discreta resultado del muestreo.
- $e(t) \equiv$ señal de entrada al muestreador.
- $T \equiv$ periodo de muestreo.
- $\delta(t) \equiv$ función delta de Dirac.

Debemos observar que el muestreo ideal origina una señal que solo está definida en los instantes de muestreo (múltiplos del periodo de muestreo) y cuya amplitud es el producto de la amplitud de la señal continua en el instante de muestreo por la función impulso (amplitud infinita y área total unitaria); en conclusión, *el muestreo ideal no puede implementarse en la práctica*, pero, como veremos más adelante, permite modelar perfectamente todo el proceso de muestreo y reconstrucción.

Gráficamente el resultado es:

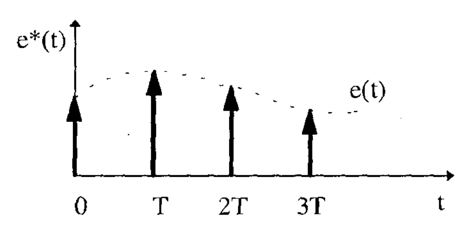
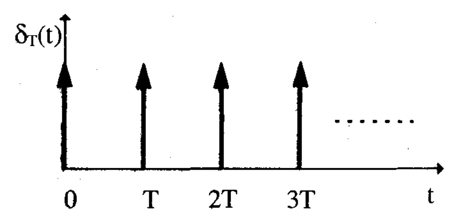


Fig. 1.25 Muestreo ideal

El muestreador ideal también es conocido como modulador de impulsos, ya que verifica la ecuación:

$$e^{*}(t) = e(t) \cdot \delta_T(t) \qquad (1.13)$$

donde: $\delta_T(t) \equiv$ tren de impulsos.



Permitiendo el modelo:

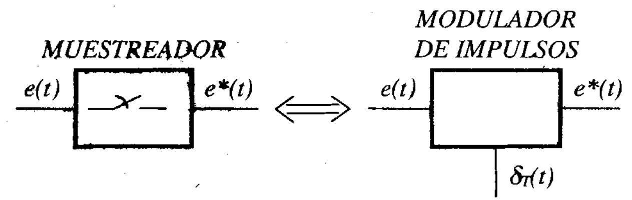


Fig. 1.26 Muestreo ideal como una modulación de impulsos

* Propiedades de la señal muestreada de forma ideal:

Aplicando la transformada de Laplace en la expresión de una señal muestreada:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\cdot\delta(t-kT) \tag{1.14}$$

$$f^*(t) = f(t)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT) = f(t)\cdot\delta_T(t) \tag{1.15}$$

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\cdot L[\delta(t-kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\cdot e^{-kTs} \tag{1.16}$$

En conclusión la transformada de Laplace de una señal muestreada no es una función polinómica, por lo que no será útil para trabajar con sistemas discretos y será necesario buscar una transformación alternativa que permita operar con funciones polinómicas en dichos sistemas; a esta nueva transformada se la denominará *transformada Z.*

Puede demostrarse una expresión alternativa de la transformada de Laplace de una señal muestreada definida por: $F^*(s) = \frac{1}{T}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} F(s \pm j\cdot n\omega_s)$, donde $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$. De este modo puede afirmarse que la transformada de Laplace de una señal discreta es periódica de periodo $jn\omega_s$, verificando que si s_1 es un polo de F(s) ⇒ es polo de $F^*(s)$ ⇒ $s_1 + jn\omega_s$ es también polo de $F^*(s)$. La representación en plano transformado de Laplace implica una repetición en bandas centradas en $jn\omega_s$ de las raíces (polos y ceros) de la señal muestreada. La banda principal se denomina banda primaria y el resto de bandas se denominan bandas complementarias. Si la localización de los polos y ceros de $F^*(s)$ es

conocida, entonces queda automáticamente determinada la localización de las raíces en el resto del plano.

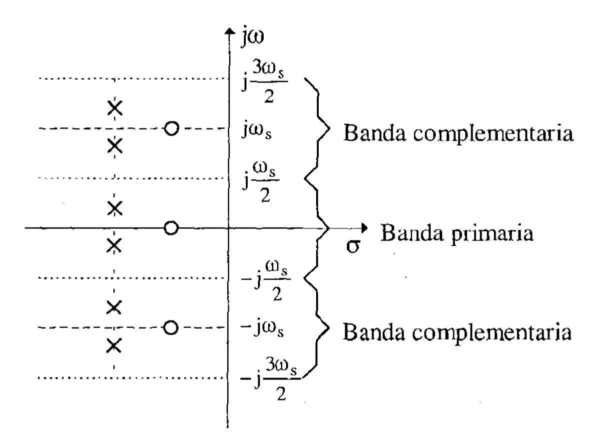


Fig. 1.27 Raíces en el plano S de la transformada de Laplace de una señal muestreada

* Caracterización de la reconstrucción de señal: El dispositivo más simple de reconstrucción de datos, y también el más común, es el mantenedor de orden cero (ZOH). El mantenedor de orden cero proporciona fundamentalmente, como valor de la señal de salida, el valor de la última muestra recibida a su entrada:

$$\bar{e}(t) = e(kT) \qquad kT \le t < (k+1)T$$

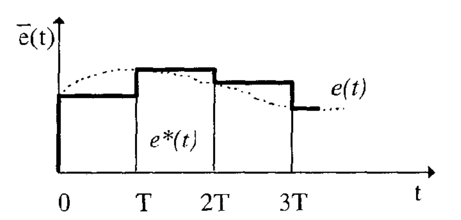


Fig. 1.28 Reconstrucción efectuada por el ZOH

El mantenedor de orden cero es un sistema que no necesita memoria, a diferencia de otros tipos de mantenedores de datos, por esta razón es más económico y el más utilizado de todos ellos.

La respuesta impulsional de un mantenedor de orden cero se puede expresar como:

$$g_{oh}(t) = u(t) - u(t - T) \tag{1.17}$$

δ(t) — t — *ENTRADA*

$g_{oh}(t)$ — 1 — *T* — t — *SALIDA*

Aplicando la transformada de Laplace a esta respuesta impulsional, obtenemos la función de transferencia del mantenedor de orden cero:

$$g_{oh}(t) = u(t) - u(t-T) \xrightarrow{TL} G_{oh}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \quad (1.18)$$

Nótese que esta función de transferencia *no corresponde a ningún dispositivo físico*, porque se ha deducido suponiendo funciones impulso en la entrada del mantenedor de orden cero; sin embargo, si se utiliza junto con el muestreo ideal, proporcionan una buena descripción matemática del procedimiento de muestreo y reconstrucción real de las señales de un sistema de control en tiempo discreto.

1.9 Teorema del muestreo

Los sistemas de control en tiempo discreto conllevan de manera inherente operaciones de muestreo y reconstrucción de señales. Estos procesos deben verificar en todo momento el teorema del muestreo, siendo este teorema fundamental en sistemas discretos, como se comprobará a continuación.

Sea una señal f(t) con espectro de banda limitada:

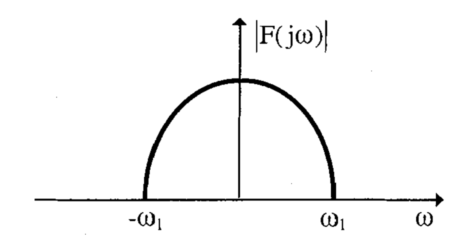


Fig. 1.29 Espectro de la señal f(t)

donde ω_l es la máxima frecuencia que presenta f(t).

Según la expresión $F^*(s) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} F(s \pm j \cdot n\omega_s)$, el muestreo ideal equivale a una repetición de este espectro centrado en $n \cdot \omega_s$, con $n \in N$.

De este modo el espectro de la señal muestreada con muestreo ideal puede sufrir dos situaciones diferentes:

a) $\omega_s \geq 2\omega_l$:

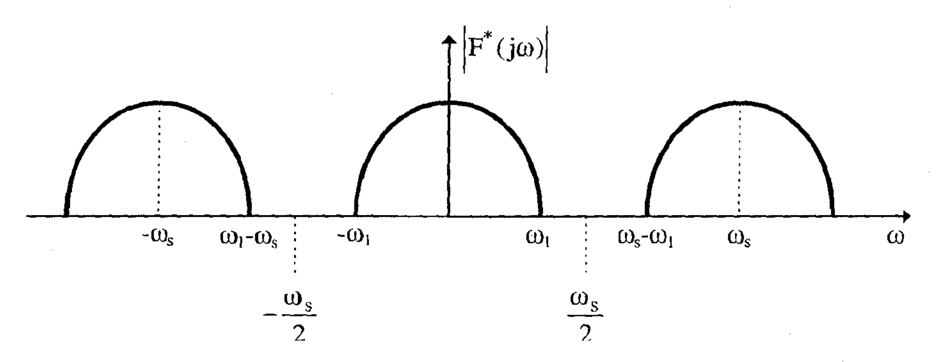


Fig. 1.30 Repetición del espectro de la señal debido al muestreo

Suponiendo que el mantenedor de orden cero es un filtro pasa bajos ideal, se obtendría la señal previa al muestreo como salida del mismo. Sin embargo, un filtro paso bajos ideal no es causal, y por ello el mantenedor de orden cero distorsiona y no elimina totalmente las componentes en alta frecuencia de la señal muestreada, notándose más este efecto cuanto menor es la relación ω_s/ω_l. En conclusión, interesa trabajar siempre con la relación ω_s/ω_l lo más grande posible, despreciando de este modo los efectos del muestreo y reconstrucción.

b) $\omega_s < 2\omega_l$:

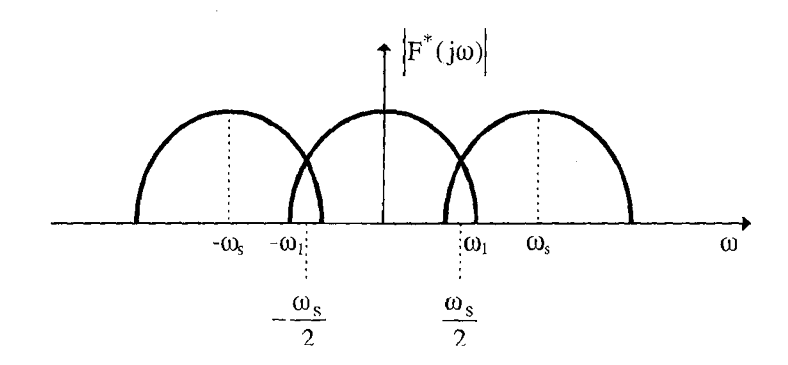


Fig. 1.31 Superposición de espectros (aliasing)

En este caso aparece un efecto de superposición de espectros que provocan que no sea posible recuperar la señal original previa al muestreo a partir de la señal muestreada, ni en el caso en el cual se realice un filtrado con filtro pasa bajos ideal. A este efecto se le denomina *aliasing* y siempre debe evitarse en un proceso de muestreo.

A la vista de las dos situaciones anteriores, se desprende la siguiente afirmación:

Teorema de Shannon (o del muestreo): "La mínima frecuencia de muestreo para poder recuperar una señal previa al muestreo, a partir de la señal muestreada a través de un filtro pasa bajos ideal es $\omega_s = 2\omega_l$, donde ω_l es la máxima frecuencia que presenta la señal a muestrear."

Para poder recuperar la señal original previa al muestreo a partir de la señal muestreada, es necesario efectuar un filtrado paso bajo. Debe observarse que este filtrado ideal no puede realizarse en la práctica debido a que un filtro con característica espectral rectangular no es causal. Dicho filtrado se realiza normalmente mediante el mantenedor de datos de orden cero. En este caso la expresión del espectro del filtro resultante es:

$$G_{oh}(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s} \Rightarrow G_{oh}(j\omega)=\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}=T\frac{\operatorname{sen}\left(\omega T/2\right)}{\omega T/2}\cdot e^{-j\omega T/2}=\frac{2\pi}{\omega_s}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right)}{\frac{\pi\omega}{\omega_s}}e^{-j\omega T/2}$$

$$G_{oh}(j\omega)=\frac{2\pi}{\omega s}\cdot \operatorname{sinc}\left(\pi\omega/\omega_s\right)\cdot e^{-j\pi\omega/\omega_s} \tag{1.19}$$

En la figura siguiente se observa como este filtro distorsiona la señal recuperada debido a un filtrado bastante alejado del ideal; este filtrado mejora cuanto mayor es la frecuencia de muestreo, proporcionando un resultado que coincide con el previsible a partir de una observación en dominio temporal.

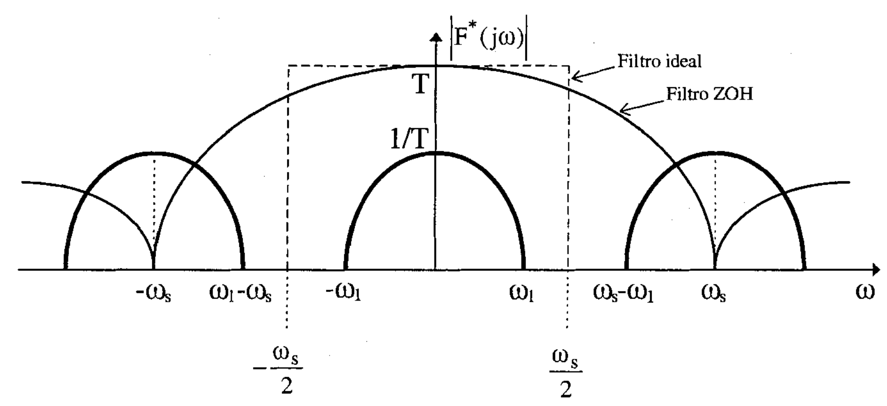


Fig. 1.32 Distorsión del espectro de la señal al recuperar con ZOH

1.10 La transformada Z

La transformada Z es una herramienta clásica para el análisis y síntesis de sistemas discretos. Se obtiene aplicando la transformada de Laplace en señales discretas, y su principal ventaja reside en la propiedad de transformar expresiones de tipo exponencial en expresiones polinómicas.

Sea la señal muestreada:

$$x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(t)\cdot\delta(t-kT)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\cdot\delta(t-kT) \tag{1.20}$$

Aplicando la transformada de Laplace, se obtiene:

$$L\left[x^{*}(t)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} x(t) \cdot e^{-kTs} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot e^{-kTs} \qquad (1.21)$$

donde T es el periodo de muestreo.

Puede observarse que esta expresión es difícil de tratar debido a su naturaleza.

Si utilizamos el cambio de variable:

$$z = e^{Ts} \qquad (1.22)$$

Surge, de este modo, la definición de transformada Z:

$$X[z] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot z^{-k} \qquad (1.23)$$

La transformada Z está relacionada inherentemente a un proceso de muestreo. De hecho, únicamente puede aplicarse sobre señales muestreadas, y en el proceso de realización de la antitransformada Z se obtiene una señal muestreada. En conclusión, ello implica que diversas señales continuas puedan tener la misma transformada Z debido a que posean la misma señal muestreada.

Por otra parte, debe indicarse que la transformada Z ofrece como solución una serie que permitirá una expresión en forma de cociente de polinomios cuando converja; ello limitará el estudio a través de dicha expresión a zonas del plano Z donde se garantice la convergencia.

* Transformación de zonas del plano S al plano Z:

Transformación de un punto del plano S:

$$s = -\sigma + j\omega \Rightarrow z = e^{Ts} = e^{-\sigma T}\left[\cos(\omega T) + j \cdot \sin(\omega T)\right] \qquad (1.24)$$

De este modo:

$$\mathrm{Re}[z] = e^{-\sigma T} \cdot \cos(\omega T) \; ; \; \mathrm{Im}[z] = e^{-\sigma T} \cdot \sin(\omega T) \qquad (1.25)$$

De la misma forma es posible transformar todos los puntos del plano S comprendidos en el interior de la banda primaria, como se puede observar en la figura 1.33:

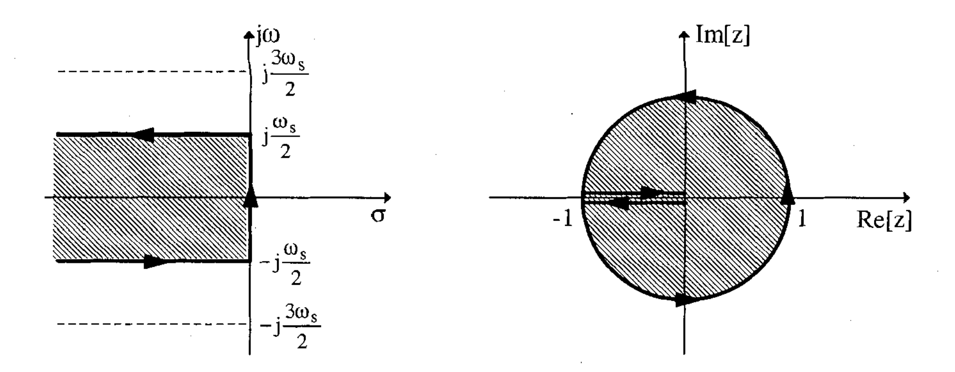


Fig. 1.33 Transformación de la banda primaria del plano S al plano Z

En conclusión, por periodicidad todas las bandas complementarias se transforman de forma análoga a la banda primaria. Así, todo el semiplano izquierdo del plano S se transforma en el interior del circulo de radio unidad en el plano Z, todo el semiplano derecho se transforma en el exterior del circulo de radio unidad y el eje imaginario se transforma en el propio circulo de radio unidad, determinando de este modo, la frontera de estabilidad. Debe observarse que el número de singularidades en plano Z es finito, a diferencia de lo que ocurría en el plano S, debido a la coincidencia en la transformación de las bandas complementarias respecto a la primaria.

1.11 Respuesta temporal de un sistema lineal invariante analógico frente a una entrada muestreada

Un sistema lineal invariante analógico queda plenamente caracterizado por su respuesta impulsional o por su función de transferencia (transformada de Laplace de la respuesta impulsional).

Frente a una entrada continua, el sistema proporciona una señal continua a la salida, resultado de la convolución analógica entre la señal de entrada y la respuesta impulsional del sistema. La transformada de Laplace de esta señal es igual al producto de la transformada de Laplace de la señal de entrada por la función de transferencia del sistema.

$x(t)$ / $X(s)$ → [$h(t)$, $H(s)$] → $y(t)=x(t)*h(t)$ / $Y(s)=H(s)\cdot X(s)$

Fig. 1.34 Respuesta de un sistema continuo a una entrada continua

La respuesta de un sistema analógico frente a una señal muestreada también sigue siendo continua, y se puede caracterizar mediante la expresión:

$$c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\cdot g(t-kT) \tag{1.26}$$

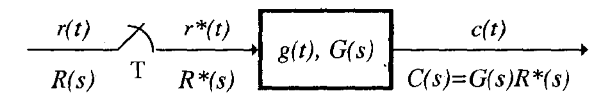


Fig. 1.35 Respuesta de un sistema continuo a una entrada discreta

Es importante enfatizar la influencia del periodo de muestreo en la señal de salida; debe observarse en la expresión anterior que el simple hecho de cambiar el periodo de muestreo implica, de un modo directo, cambiar la señal de salida. En concreto, el aumento del periodo de muestreo origina una señal de salida mucho más diferenciada respecto a la señal de salida del sistema frente a la misma señal de entrada sin muestrear, tendiendo a tener mayor sobreimpulso y perdiendo, por tanto, estabilidad relativa. Estos efectos pueden observarse en la gráfica siguiente.

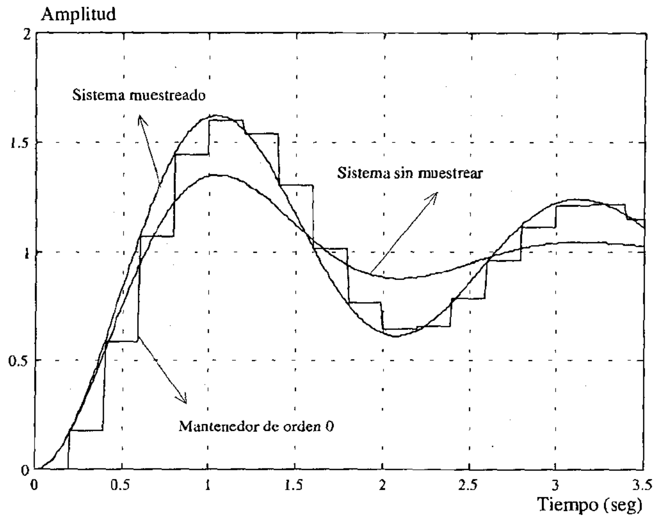


Fig. 1.36 Respuesta al escalón de un sistema discreto con periodo de muestreo T=0.2 seg.

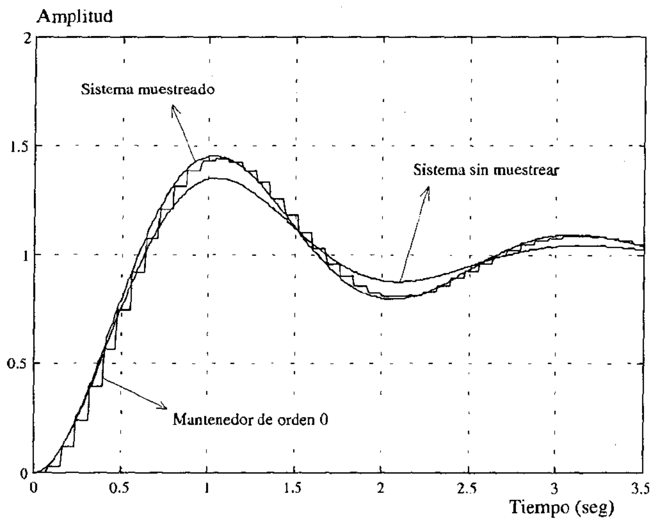


Fig. 1.37 Respuesta al escalón de un sistema discreto con periodo de muestreo T=0.08 seg.

El problema de caracterización de esta señal de salida es difícil de realizar por procedimientos habituales, y se plantea la cuestión del conocimiento de la señal de salida muestreada para, con las herramientas que disponemos en el dominio discreto, utilizar métodos de análisis semejantes a los usados en el domino continuo:

$$\xrightarrow[R(s)]{r(t)} \overset{T}{\times} \xrightarrow[R^*(s)]{r^*(t)} \boxed{g(t),\ G(s)} \xrightarrow[C(s)=G(s)R^*(s)]{c(t)} \overset{T}{\times} \xrightarrow{c^*(t)}$$

$$c^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c(kT)\cdot\delta(t-kT) \tag{1.27}$$

donde: $c(kT) = \sum_{n=0}^{k} r(nT)\cdot g(kT-nT)$ es la expresión de la convolución discreta. (1.28)

La señal $g^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)\cdot\delta(t-kT)$ se denomina *respuesta impulsional discreta* (1.29)

y permite caracterizar el sistema como un sistema discreto que ofrece una señal de salida discreta al tener una señal de entrada muestreada. Cumpliéndose así la propiedad: $C(z) = R(z)\cdot G(z)$, donde G(z) es la *función de transferencia en Z*, que puede obtenerse aplicando la transformada Z sobre la respuesta impulsional discreta.

De este modo, la caracterización del sistema y el conocimiento de la señal de salida muestreada es sencillo; sin embargo, por esta metodología únicamente se puede conocer la señal de salida en instantes de muestreo y no la señal continua de salida que físicamente se genera en el sistema. Obsérvese que este efecto no es muy importante cuando el periodo de muestreo es mucho más pequeño que las constantes de tiempo del sistema analógico.

* Aplicación de la transformada Z a la resolución de ecuaciones en diferencias:

Un algoritmo que procesa señales muestreadas puede representarse mediante la resolución de una ecuación en diferencias de la forma:

$$y(n) = \sum_{p=1}^{P} a(p)\cdot y(n-p) + \sum_{q=0}^{Q} b(q)\cdot x(n-q) \tag{1.30}$$

Para resolver esta ecuación en diferencias puede aplicarse la transformada Z utilizando los teoremas de desplazamiento:

$$Z[f(t-nT)] = z^{-n}\cdot F(z) \tag{1.31}$$

$$Z[f(t+nT)] = z^n \cdot \left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) \cdot z^{-k} \right] \qquad (1.32)$$

Ejemplo 1.4

El sistema de la figura procesa las muestras de la señal de entrada mediante un algoritmo representado por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[kT] = 0.5 \cdot x[kT] - 0.495 \cdot x[(k-1)T] + 0.995 \cdot y[(k-1)T]$$



donde x[kT] es el valor de la muestra de la señal de entrada en el instante de muestreo kT, y x[(k-1)T] se corresponde con el valor de la muestra de entrada en el instante de muestreo inmediatamente anterior.

1.- Aplicar la transformada Z a la ecuación en diferencias.

$$TZ\{y[kT]\} = 0.5 \cdot TZ\{x[kT]\} - 0.495 \cdot TZ\{x[(k-1)T]\} + 0.995 \cdot TZ\{y[(k-1)T]\}$$

2.- Realizar la transformación haciendo uso de los teoremas de desplazamiento.

$$Y(z) = 0.5 \cdot X(z) - 0.495 \cdot X(z) \cdot z^{-1} + 0.995 \cdot Y(z) \cdot z^{-1}$$

3.- Obtener la función de transferencia en Z del sistema.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.5 - 0.495 \cdot z^{-1}}{1 - 0.995 \cdot z^{-1}}$$

1.12 Funciones de transferencia de pulsos

Otra posibilidad de caracterizar la respuesta muestreada de un sistema continuo frente a una entrada muestreada consiste en aplicar las propiedades de la transformada de Laplace de una señal muestreada:

r(t) / *R(s)* — T — *r*(t)* / *R*(s)* → [*g(t), G(s)*] → *c(t)* / *C(s)=G(s)R*(s)* — T — *c*(t)* →

$$C(s) = R^*(s) \cdot G(s) \Rightarrow C^*(s) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(s + jn\omega s) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} R^*(s + jn\omega s) \cdot G(s + jn\omega s) \qquad (1.33)$$

dado que $R^*(s)$ es periódica: $R^*(s) = R^*(s + jn\omega s)$:

$$C^*(s) = R^*(s) \cdot \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega s) = R^*(s) \cdot G^*(s) \tag{1.34}$$

aplicando el cambio: $z = e^{Ts}$

$$C(z) = R(z) \cdot G(z) \tag{1.35}$$

A esta propiedad se le denomina *transformada estrella* y permite obtener las funciones de transferencia de sistemas discretos.

* Sistemas en cascada:

Supóngase el siguiente sistema:

r(t) R(s) T r*(t) R*(s) G1(s) d(t) D(s) T d*(t) D*(s) G2(s) c(t) C(s)=G2(s)D*(s) T c*(t)

Evaluando las ecuaciones en cada uno de los bloques constituyentes por separado es posible obtener fácilmente las expresiones siguientes:

$$D(s) = R^*(s) \cdot G1(s) \Rightarrow D^*(s) = R^*(s) \cdot G1^*(s) \Rightarrow D(z) = R(z) \cdot G1(z) \tag{1.36}$$

$$C(s) = D^*(s) \cdot G2(s) \Rightarrow C(z) = D(z) \cdot G2(z) \Rightarrow C(z) = G1(z) \cdot G2(z) \cdot R(z) \tag{1.37}$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = G1(z) \cdot G2(z) \tag{1.38}$$

Sin embargo, si se considera el sistema sin muestreador intermedio:

r(t) R(s) T r*(t) R*(s) G1(s) d(t) D(s) G2(s) c(t) C(s) T c*(t)

En este caso:

$$C(s) = R^*(s) \cdot G1(s) \cdot G2(s) \Rightarrow C^*(s) = R^*(s) \cdot [G1(s) \cdot G2(s)]^* \Rightarrow C(z) = R(z) \cdot G1G2(z) \tag{1.39}$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = G1G2(z) \tag{1.40}$$

donde: $$G1G2(z) = TZ[G1(s)\cdot G2(s)] = \frac{1}{T}\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} G1(s+jn\omega s)\cdot G2(s+jn\omega s)\Big|_{z=e^{Ts}} \quad (1.41)$$

debe observarse que: $$G1G2(z) \neq G1(z)\cdot G2(z) \quad (1.42)$$

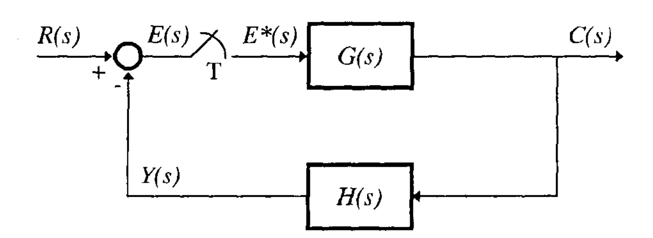
En el caso particular de tener un mantenedor de datos previo, la función de transferencia resultante es:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = Z[Goh(s)\cdot G(s)] = GohG(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot G(s)\right] = (1-z^{-1})\cdot Z\left[\frac{G(s)}{s}\right] \quad (1.43)$$

aplicando para ello el teorema de desplazamiento.

* Sistemas en lazo cerrado:

a)



Ecuaciones:

$$\begin{aligned} C(s) &= E^*(s)\cdot G(s) = (R(s)-Y(s))^*\cdot G(s) = \\ &= (R(s)-H(s)\cdot C(s))^*\cdot G(s) = \\ &= R^*(s)\cdot G(s) - (H(s)\cdot C(s))^*\cdot G(s) \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$C(z) = R(z)\cdot G(z) - HC(z)\cdot G(z) \quad (1.45)$$

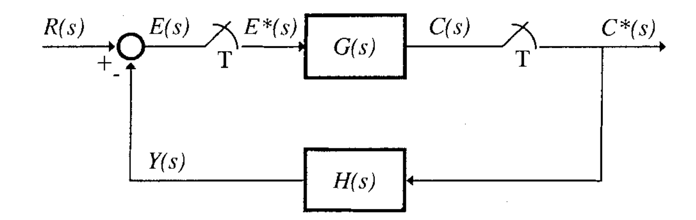
donde se observa la imposibilidad de obtener la función de transferencia en lazo cerrado. Para solucionar este problema debe evitarse aplicar la transformada estrella en expresiones donde la señal de salida queda "unida" a alguna función de transferencia (H(s)·C(s)). En este caso debe operarse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} C(s) &= E^*(s)\cdot G(s) \Rightarrow C^*(s) = E^*(s)\cdot G^*(s) \\ E^*(s) &= (R^*(s) - Y^*(s)) \\ Y^*(s) &= E^*(s)\cdot (G(s)\cdot H(s))^* \end{aligned} \quad (1.46)$$

$$
\begin{aligned}
C(z) &= E(z)\cdot G(z) \\
E(z) &= \left(R(z) - Y(z)\right) \\
Y(z) &= E(z)\cdot GH(z)
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

$$
\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+GH(z)} \tag{1.48}
$$

b)



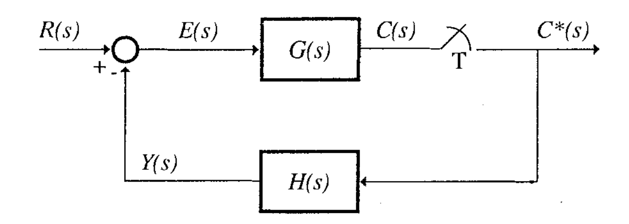
Ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
C(s) &= E^*(s)\cdot G(s) = \left(R(s) - Y(s)\right)^*\cdot G(s) = \\
&= \left(R(s) - H(s)\cdot C^*(s)\right)^*\cdot G(s) = \\
&= R^*(s)\cdot G(s) - \left(H(s)\cdot C^*(s)\right)^*\cdot G(s)
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

$$
C(z) = R(z)\cdot G(z) - H(z)\cdot G(z)\cdot C(z) \tag{1.50}
$$

$$
\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)\cdot H(z)} \tag{1.51}
$$

c)



Ecuaciones:

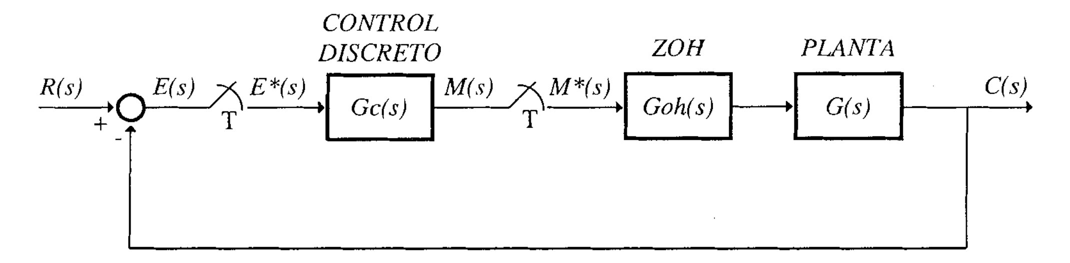
$$
\begin{aligned}
C(s) &= E(s)\cdot G(s) = \left(R(s) - Y(s)\right)\cdot G(s) = \\
&= \left(R(s) - H(s)\cdot C^*(s)\right)\cdot G(s) = \\
&= R(s)\cdot G(s) - \left(H(s)\cdot C^*(s)\right)\cdot G(s)
\end{aligned}
\tag{1.52}
$$

$$C(z) = RG(z) - GH(z) \cdot C(z) \tag{1.53}$$

$$C(z) = \frac{RG(z)}{1 + GH(z)} \tag{1.54}$$

Debe observarse que la entrada a la planta no se encuentra muestreada, lo que conlleva que no exista una expresión de función de transferencia en dominio Z, aunque pueda obtenerse la señal muestreada de salida a partir del conocimiento de la señal de entrada.

d) Controlador digital previo a ZOH y planta:



Ecuaciones:

$$C(s) = M^*(s) \cdot Goh(s) \cdot G(s) = \left((R(s) - C(s))^* \cdot Gc(s) \right)^* \cdot Goh(s) \cdot G(s) \tag{1.55}$$

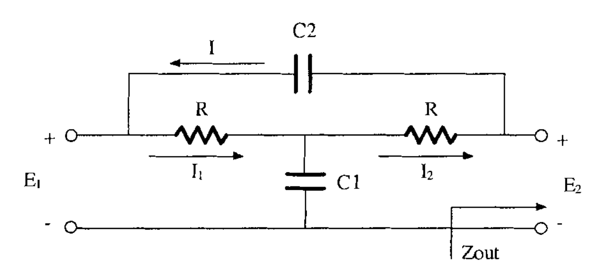
$$C(z) = R(z) \cdot GohG(z) - Gc(z) \cdot GohG(z) \cdot C(z) \tag{1.56}$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{Gc(z) \cdot GohG(z)}{1 + Gc(z) \cdot GohG(z)} \tag{1.57}$$

1.13 Problemas

Problema 1

Dado el siguiente circuito, se desea obtener la función de transferencia $\frac{E_2(s)}{E_1(s)}$:



Realizar los siguientes apartados:

1.- Determinar el valor de Zout para no tener efectos de carga. ¿Qué relación existe entre I_2 e I?

2.- Plantear las ecuaciones que describen el sistema.

Nota: Utilizar las variables I_1, I_2, I, E_1 y E_2.

3.- Trazar el diagrama de bloques del sistema.

4.- Obtener la función de transferencia.

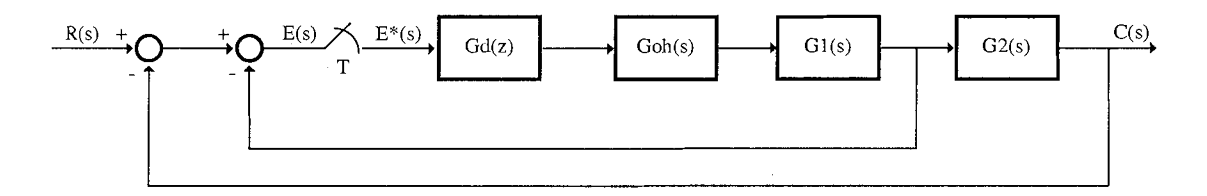
Solución:

$$\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{R^2 C_1 C_2 \cdot s^2 + 2RC_2 \cdot s + 1}{R^2 C_1 C_2 \cdot s^2 + R \cdot (C_1 + 2C_2) \cdot s + 1}$$

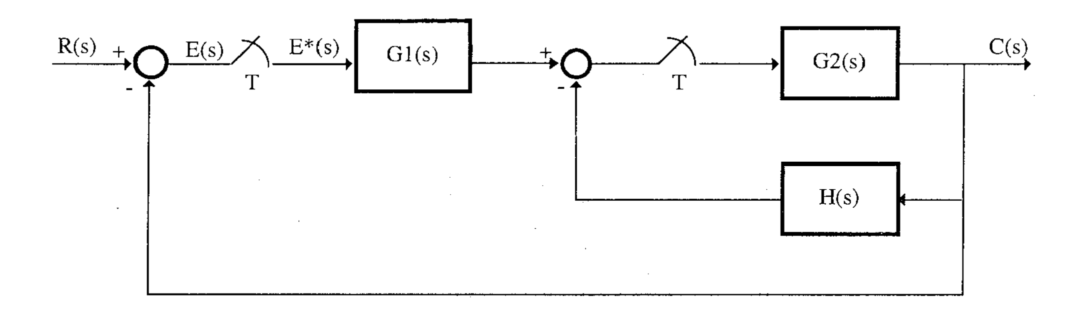
Problema 2

Obtener las funciones de transferencia (si existen) en los siguientes diagramas:

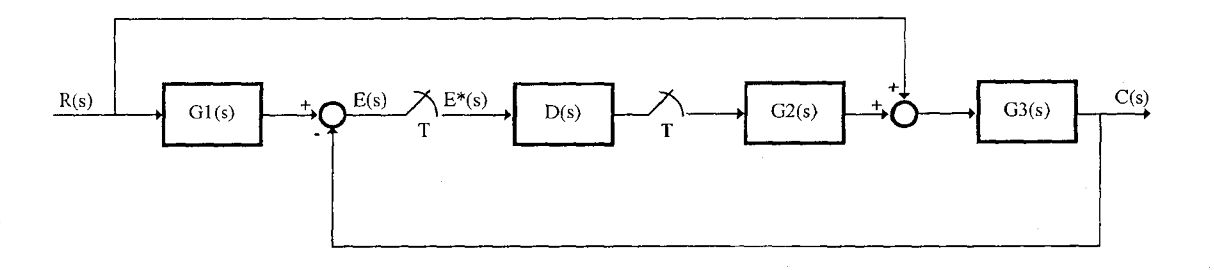
1.-



2.-



3.-



Solución:

1.- $$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{Gd(z)\cdot GohG_1G_2(z)}{1 + Gd(z)\cdot GohG_1(z) + Gd(z)\cdot GohG_1G_2(z)}$$

2.- $$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)\cdot G_2(z)}{1 + G_1(z)\cdot G_2(z) + G_2H(z)}$$

3.- $$C(z) = \frac{RG_3(z) + D(z)\cdot G_2G_3(z)\cdot G_1R(z)}{1 + D(z)\cdot G_2G_3(z)}$$

1.14 Tabla de transformadas

Transformada de Laplace E(s)	Función temporal e(t)	Transformada Z E(z)	Transformada Z modificada E(z, m)
$\frac{1}{s}$	$u(t)$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{mT}{z-1}+\frac{T}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$	$\frac{T^2}{2}\left[\frac{m^2}{z-1}+\frac{2m+1}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3}\right]$
$\frac{(k-1)!}{s^k}$	t^{k-1}	$\lim_{a\to 0}(-1)^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]$	$\lim_{a\to 0}(-1)^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left[\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}\right]$
$\frac{1}{(s+a)}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t\,e^{-at}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{Te^{-amT}\left[e^{-aT}+m\left(2-e^{-aT}\right)\right]}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{(k-1)!}{(s+a)^k}$	$t^k e^{-at}$	$(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial a^k}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]$	$(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial a^k}\left[\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}\right]$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$	$\frac{1}{z-1}-\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$t-\frac{1-e^{-at}}{a}$	$\frac{z\left[\left(aT-1+e^{-aT}\right)z+\left(1-e^{-aT}-aTe^{-aT}\right)\right]}{a(z-1)^2(z-e^{-aT})}$	$\frac{T}{(z-1)^2}+\frac{amT-1}{a(z-1)}+\frac{e^{-amT}}{a(z-e^{-aT})}$
$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-(1+at)e^{-at}$	$\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}-\frac{aTe^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{1}{z-1}-\left[\frac{1+amT}{z-e^{-aT}}+\frac{aTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}\right]e^{-amT}$
$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}-\frac{e^{-bmT}}{z-e^{-bT}}$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\mathrm{sen}(at)$	$\frac{z\,\mathrm{sen}(aT)}{z^2-2z\cos(aT)+1}$	$\frac{z\,\mathrm{sen}(amT)+\mathrm{sen}(1-m)aT}{z^2-2z\cos(aT)+1}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$	$\frac{z(z-\cos(aT))}{z^2-2z\cos(aT)+1}$	$\frac{z\cos(amT)-\cos(1-m)aT}{z^2-2z\cos(aT)+1}$
$\frac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}e^{-at}\,\mathrm{sen}(bt)$	$\frac{1}{b}\left[\frac{ze^{-aT}\,\mathrm{sen}(bT)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(bT)+e^{-2aT}}\right]$	$\frac{1}{b}\left[\frac{e^{-amT}\left[z\,\mathrm{sen}(bmT)+e^{-aT}\,\mathrm{sen}(1-m)bT\right]}{z^2-2ze^{-aT}\cos(bT)+e^{-2aT}}\right]$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos(bt)$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos(bT)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(bT)+e^{-2aT}}$	$\frac{e^{-amT}\left[z\cos(bmT)+e^{-aT}\,\mathrm{sen}(1-m)bT\right]}{z^2-2ze^{-aT}\cos(bT)+e^{-2aT}}$
$\frac{a^2+b^2}{s\left[(s+a)^2+b^2\right]}$	$1-e^{-at}\left(\cos(bt)+\frac{a}{b}\mathrm{sen}(bt)\right)$	$\frac{z(Az+B)}{(z-1)(z^2-2ze^{-aT}\cos(bT)+e^{-2aT})}$ $A=1-e^{-aT}\left(\cos(bT)+\frac{a}{b}\mathrm{sen}(bT)\right)$ $B=e^{-2aT}+e^{-aT}\left(\frac{a}{b}\mathrm{sen}(bT)-\cos(bT)\right)$	$\frac{1}{z-1}$ $-\frac{e^{-amT}\left[z\cos(bmT)+e^{-aT}\,\mathrm{sen}(1-m)bT\right]}{z^2-2ze^{-aT}\cos(bT)+e^{-2aT}}$ $+\frac{\frac{a}{b}\left\{e^{-amT}\left[z\,\mathrm{sen}(bmT)-e^{-aT}\,\mathrm{sen}(1-m)bT\right]\right\}}{z^2-2ze^{-aT}\cos(bT)+e^{-2aT}}$
$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab}+\frac{e^{-at}}{a(a-b)}+\frac{e^{-bt}}{b(b-a)}$	$\frac{(Az+B)z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})(z-1)}$ $A=\frac{b(1-e^{-aT})-a(1-e^{-bT})}{ab(b-a)}$ $B=\frac{ae^{-aT}(1-e^{-bT})-be^{-bT}(1-e^{-aT})}{ab(b-a)}$	

2. Análisis temporal de sistemas continuos y discretos

2.1 Respuesta temporal.

La respuesta temporal de un sistema lineal invariante en el tiempo puede descomponerse en dos partes: la respuesta *transitoria* y la respuesta *estacionaria*. De este modo, si denominamos c(t) a la expresión de la respuesta temporal:

$$c(t) = c_t(t) + c_{ss}(t)$$

donde: ct(t) = Respuesta transitoria.

css(t) = Respuesta estacionaria.

La respuesta transitoria es originada por la propia característica dinámica del sistema y determina el comportamiento del sistema durante la transición de algún estado inicial hasta el estado final.

La respuesta estacionaria depende fundamentalmente de la señal de excitación al sistema y, si el sistema es estable, es la respuesta que perdura cuando el tiempo crece infinitamente.

De este modo hemos logrado determinar de un modo simple la estabilidad absoluta de un sistema; se dice que un sistema es estable si su respuesta transistoria decae a cero cuando el tiempo tiende a infinito.

Se define el error en estado estacionario como la diferencia entre la señal de referencia y la señal realimentada en estado estacionario en sistemas estables. Este error coincide con el valor estacionario de la señal originada por el detector de error.

Por otra parte, en sistemas de control, interesa minimizar la desviación de la señal de salida respecto a la señal de entrada en estado transitorio. Por esta razón se caracteriza la respuesta transitoria respecto a entradas típicas o estándares, conociendo que, como el sistema es lineal, la respuesta del sistema a señales más complejas es perfectamente predecible a partir del conocimiento de la respuesta a estas entradas de prueba más simples.

Generalmente, las entradas típicas son: función impulsional, función escalón, función en rampa y función parabólica en el tiempo; aunque la más importante de todas ellas es, sin duda, la función escalón.

2.1.1 Sistemas de primer orden.

Sistema de primer orden es aquel que únicamente posee un polo en su función de transferencia.

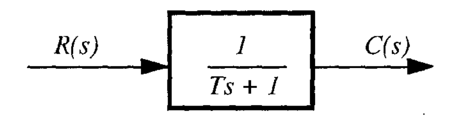


Fig. 2.1 Sistema de primer orden. T: constante de tiempo del sistema

* Respuesta al escalón:

$$r(t) = u(t) \xrightarrow{TL} R(s) = \frac{1}{s}$$

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} \xrightarrow{TL^{-1}} c(t) = \left[1 - e^{-\frac{t}{T}} \right] \cdot u(t)$$

Obsérvese que c(t) =1 cuando t tiende a infinito si T> 0; esto implica que el polo de la función de transferencia del sistema debe encontrarse en el semiplano izquierdo del plano transformado S. Si T≤ 0, el sistema no alcanza el estado estacionario, resultando, de este modo, el sistema inestable.

Gráficamente:

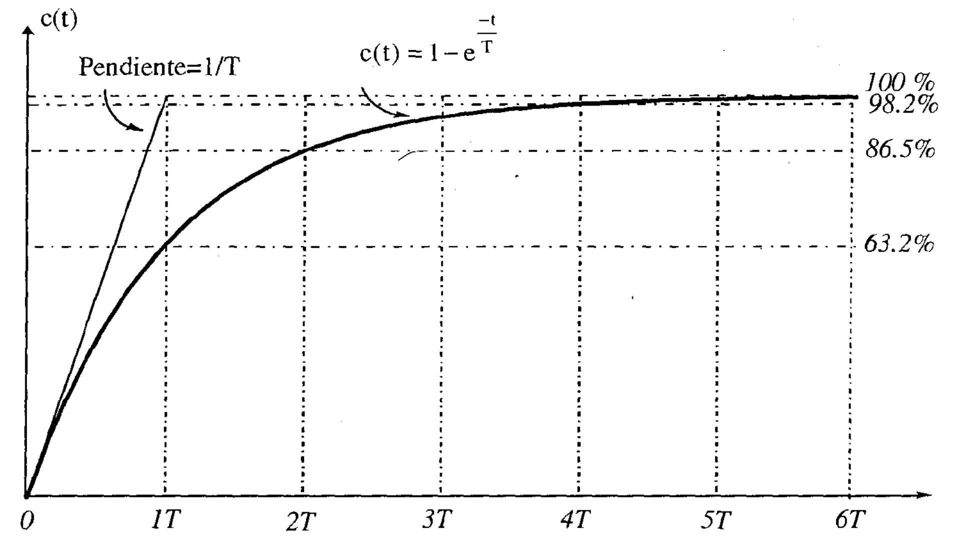


Fig. 2.2 Respuesta al escalón

Observando la gráfica se comprueba que para t = T la señal de salida ha alcanzado el 63.2 % del valor final, siendo esta una medida típica en la caracterización de sistemas de primer orden.

A efectos prácticos, se considera que cuando han transcurrido por lo menos cuatro constantes de tiempo, la señal de salida ha alcanzado el valor final.

$$t = 4T \rightarrow c(t) \cong css(t) \approx 1$$

De este modo se deduce que cuanto más pequeña es la constante de tiempo de un sistema de primer orden más rápidamente alcanza el valor final.

2.1.2 Sistemas de segundo orden.

Un sistema de segundo orden se caracteriza por poseer dos polos en su función de transferencia.

Expresión normalizada:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde se define:

ξ= Relación de amortiguamiento.

ω_n= Frecuencia natural no amortiguada.

Los polos de un sistema de segundo orden vienen determinados por la expresión:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

* Tipos de sistemas en función del valor de ξ:

En la siguiente gráfica se visualiza la ubicación de polos de la función de transferencia en función del valor de ξ.

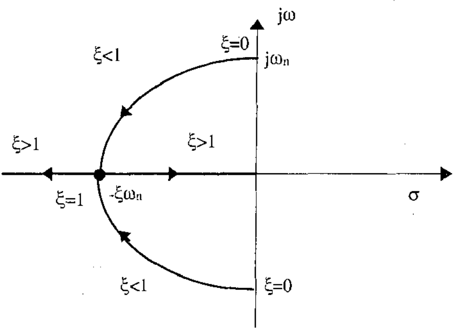


Fig. 2.3 Diagrama de la ubicación de los polos

Para $\xi = 0 \Rightarrow$ Sistema oscilatorio. $s_{1,2} = \pm j\omega_n$

Para $0 < \xi < 1 \Rightarrow$ Sistema subamortiguado. $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\sigma \pm j\omega_d$

Para $\xi = 1 \Rightarrow$ Sistema con amortiguamiento Crítico. $s_{1,2} = -\xi\omega_n$

Para $\xi > 1 \Rightarrow$ Sistema sobreamortiguado. $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$

* Respuesta al escalón en un sistema subamortiguado ($0<\xi<1$):

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \xrightarrow{TL^{-1}} c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}\left[\cos(\omega_d \cdot t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \operatorname{sen}(\omega_d \cdot t)\right];\ t \geq 0 \qquad (2.1)$$

$$c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \operatorname{sen}\left[\omega_d \cdot t + tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right] = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \operatorname{sen}[\omega_d \cdot t + \theta];\ t \geq 0 \qquad (2.2)$$

donde: $\theta = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$, con lo cual θ es el ángulo que forma el polo respecto al origen; de hecho puede expresarse: $\xi = \cos(\theta)$. En conclusión, a medida que θ aumenta la relación de amortiguamiento disminuye.

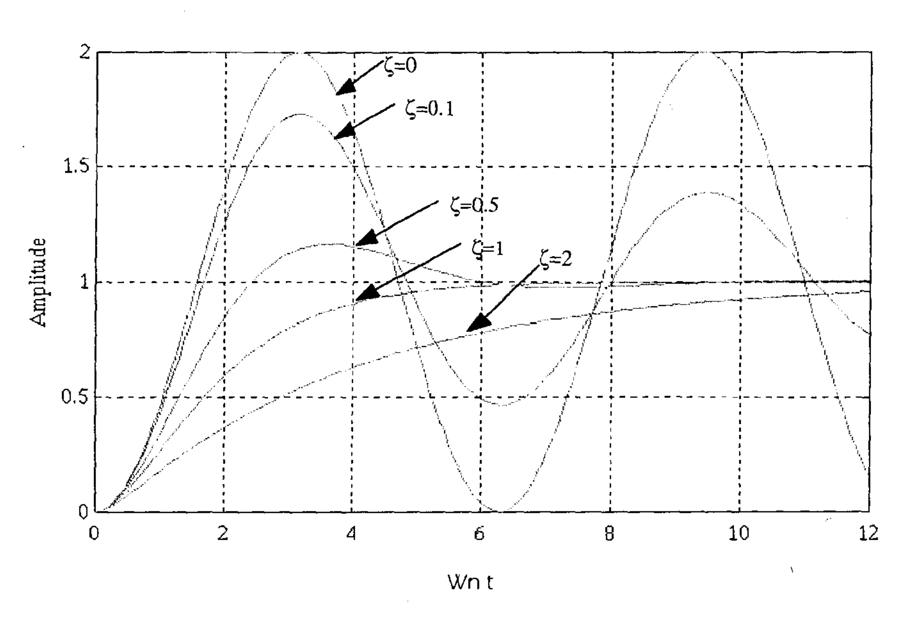


Fig. 2.4 Respuesta al escalón de un sistema de segundo orden

La respuesta del sistema para $\xi = 0$ es oscilatoria, como puede comprobarse en la gráfica anterior. Por otra parte, se observa que el valor máximo de amplitud logrado en el estado transitorio decrece a medida que aumenta ξ $(0 < \xi < 1)$. En concreto, para valores de $\xi \geq 1$ desaparece totalmente este máximo, lográndose el valor máximo de la señal cuando se alcanza el estado estacionario. Esta característica es tanto más acentuada cuanto mayor es el valor de ξ. En concreto; si $\xi >> 1$ la respuesta del sistema de segundo orden puede aproximarse por la respuesta de un primer orden, realizándose lo que se conoce como aproximación de polo dominante. La respuesta, en este caso, queda caracterizada por la raíz real de constante de tiempo mayor (la más cercana al eje imaginario en el plano S). Debe observarse que esta aproximación no puede realizarse cuando se analiza el inicio de respuesta, donde todavía perdura el efecto de la señal originada por la raíz no dominante.

2.2 Especificaciones de respuesta transitoria.

Generalmente, en la práctica, se especifican las características o especificaciones requeridas a un sistema de control en términos de cantidades en el dominio del tiempo. Estas cantidades vienen determinadas en términos de la respuesta transitoria frente a una entrada tipo escalón (u(t)). A esta respuesta se le denomina respuesta *indicial.*

De este modo se caracteriza la dinámica de un sistema, aunque trabaje con otro tipo de entradas, a través de la dinámica requerida frente a una entrada escalón. El significado de los parámetros definidos en la caracterización de la respuesta indicial determina la forma de la respuesta transitoria de un sistema.

En la figura siguiente puede observarse la respuesta típica de un sistema frente a una entrada escalón.

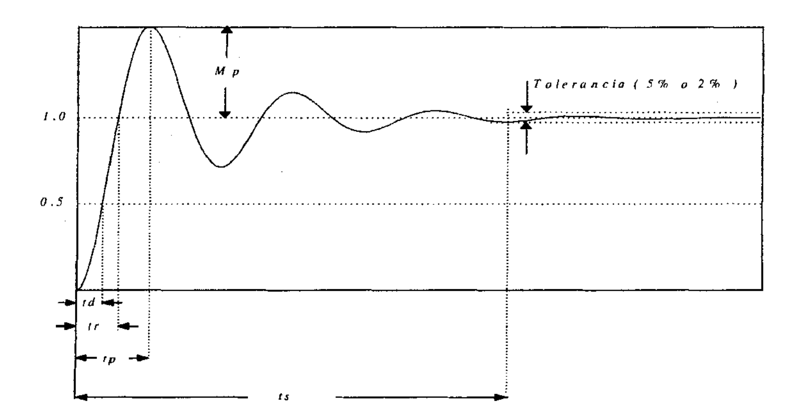


Fig. 2.5 Respuesta de un sistema de segundo orden frente a una entrada en escalón

Definiciones:

* td: Tiempo de retardo.

Tiempo que tarda la respuesta en alcanzar el 50 % del valor final.

* tr: Tiempo de subida o crecimiento.

Sistemas subamortiguados: Tiempo que tarda la respuesta en alcanzar el 100 % del valor final.

Sistemas sobreamortiguados: Tiempo que tarda la respuesta en pasar del 10 % al 90 % del valor final.

* tp: Tiempo de pico.

Tiempo que tarda la respuesta en alcanzar el primer máximo. Solo existe en sistemas subamortiguados.

* Mp: Máximo sobreimpulso (porcentual).

Es el valor de pico máximo de la curva de respuesta ponderado por el valor final obtenido.

$$Mp(\%) = \frac{c(tp) - c(\infty)}{c(\infty)} \cdot 100\ (\%) \qquad (2.3)$$

El máximo sobreimpulso es un parámetro indicativo de la 'estabilidad relativa' del sistema.

* ts: Tiempo de establecimiento.

Tiempo requerido por la curva de respuesta para alcanzar y mantenerse dentro de determinado rango (habitualmente 5 % o 2 %) del valor final. Generalmente está relacionado con las constantes de tiempo más grandes del sistema.

Idealmente interesará lograr siempre sistemas de control que minimicen el Máximo sobreimpulso y los tiempos de respuesta transitoria, manteniendo la máxima precisión posible.

2.2.1 Particularización para sistemas de segundo orden subamortiguados.

1- Cálculo de tr:

$$c(tr) = 1 \Rightarrow 1 = 1 - e^{-\xi\omega_n tr}\left[\cos(\omega d \cdot tr) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \mathrm{sen}(\omega d \cdot tr)\right] \Rightarrow \mathrm{tg}(\omega d \cdot tr) = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = -\frac{\omega d}{\sigma} \qquad (2.4)$$

$tr = \frac{1}{\omega d} \cdot \mathrm{arctg}\left(-\frac{\omega d}{\sigma}\right) = \frac{\pi - \theta}{\omega d}$, donde $\theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega d}{\sigma}\right)$, con lo cual θ es el ángulo que forma el polo respecto al origen. En el caso de poseer raíces imaginarias puras (ξ=0), el tiempo de subida coincide con un cuarto del periodo de señal ($tr = \pi/2\omega_n$); a su vez, cuando las raíces son reales (ξ=1), el sistema tiene una característica de amortiguamiento crítico y el tiempo de subida, según la expresión anterior, es infinito, lo que conlleva la necesidad de variar su definición.

2- Cálculo de tp:

$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{tp} = 0 \Rightarrow \frac{\omega n \cdot e^{-\xi\omega n tp}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \operatorname{sen}(\omega d \cdot tp) = 0 \Rightarrow \omega d \cdot tp = k \cdot \pi \qquad (2.5)$$

El primer máximo se obtiene para: $tp = \frac{\pi}{\omega d} = \frac{Td}{2}$, donde Td es el periodo de oscilación.

De este modo, a medida que aumente la parte imaginaria de los polos del sistema, el tiempo de pico disminuirá.

3- Cálculo del Máximo sobreimpulso:

$$Mp = c(tp) - 1 \Rightarrow 1 - e^{-\xi\omega n tp}\left[\cos(\omega d \cdot tp) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \operatorname{sen}(\omega d \cdot tp)\right] = e^{-\xi\omega n \pi / \omega d}$$

$$Mp = e^{-\sigma\pi / \omega d} = e^{-\pi\xi / \sqrt{1-\xi^2}} \qquad (2.6)$$

Observando la expresión anterior puede trazarse una gráfica que relacione Mp en función de ξ.

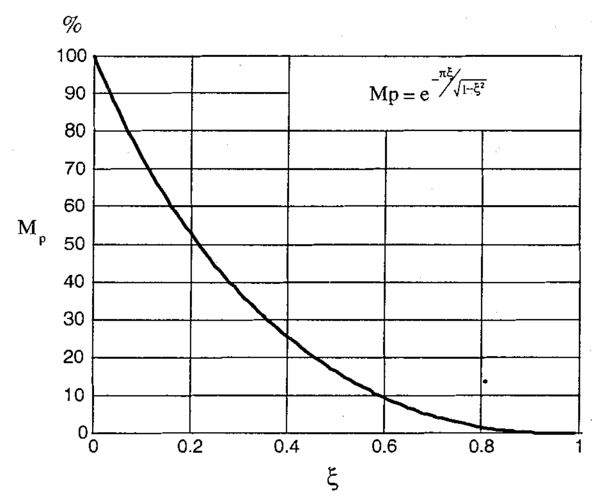


Fig. 2.6 Curva de Mp en función de ξ

De hecho, cuanto mayor es ξ, menor es el Máximo sobreimpulso obtenido en la respuesta transitoria. Expresado de otro modo, cuanto mayor es el ángulo que forma el polo del sistema respecto al eje real mayor es el sobreimpulso de la respuesta. En conclusión, el aumento de la parte real (en valor absoluto) o la disminución de la parte imaginaria de las raíces conlleva la reducción del Mp. De la figura 2.6 se puede observar que para ξ>0.6 el Mp es menor al 10%.

4- Cálculo del tiempo de establecimiento:

Para determinar las expresiones del tiempo de establecimiento en un sistema subamortiguado, se considera que la respuesta queda comprendida entre envolventes, que permiten aproximar el tiempo de establecimiento en función de la parte real de los polos del sistema.

Así, considerando los errores:

$$5\ \% \Rightarrow ts \cong \frac{3}{\xi \omega n} = \frac{3}{\sigma} \tag{2.7}$$

$$2\ \% \Rightarrow ts \cong \frac{4}{\xi \omega n} = \frac{4}{\sigma} \tag{2.8}$$

el tiempo de establecimiento es inversamente proporcional a la parte real (en valor absoluto) de las raíces del sistema subamortiguado.

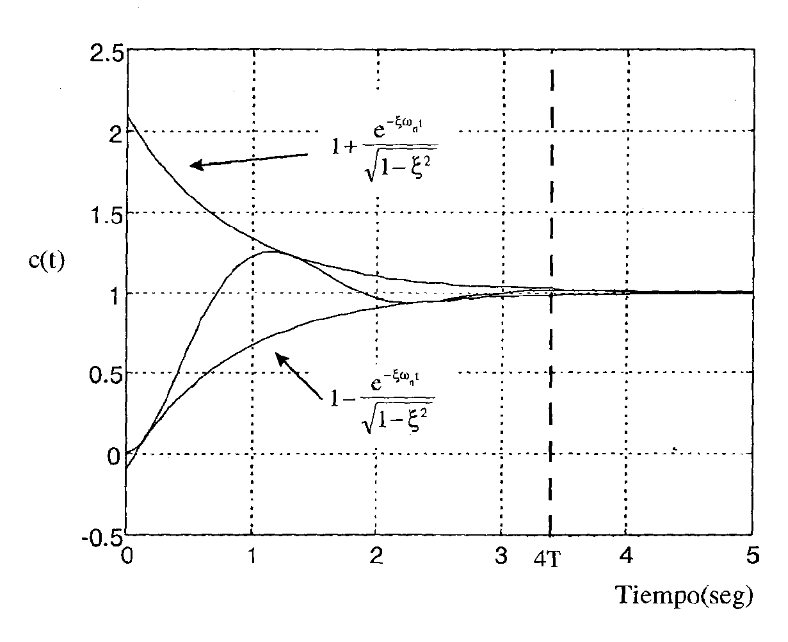
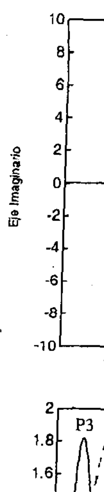
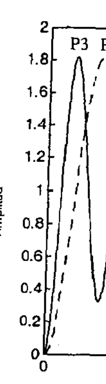


Fig 2.7 Envolventes de respuesta al escalón unitario





Ejemplo 2.1

En la figura 2
con un filtro
así como gan

Calcular el va
relación de ar

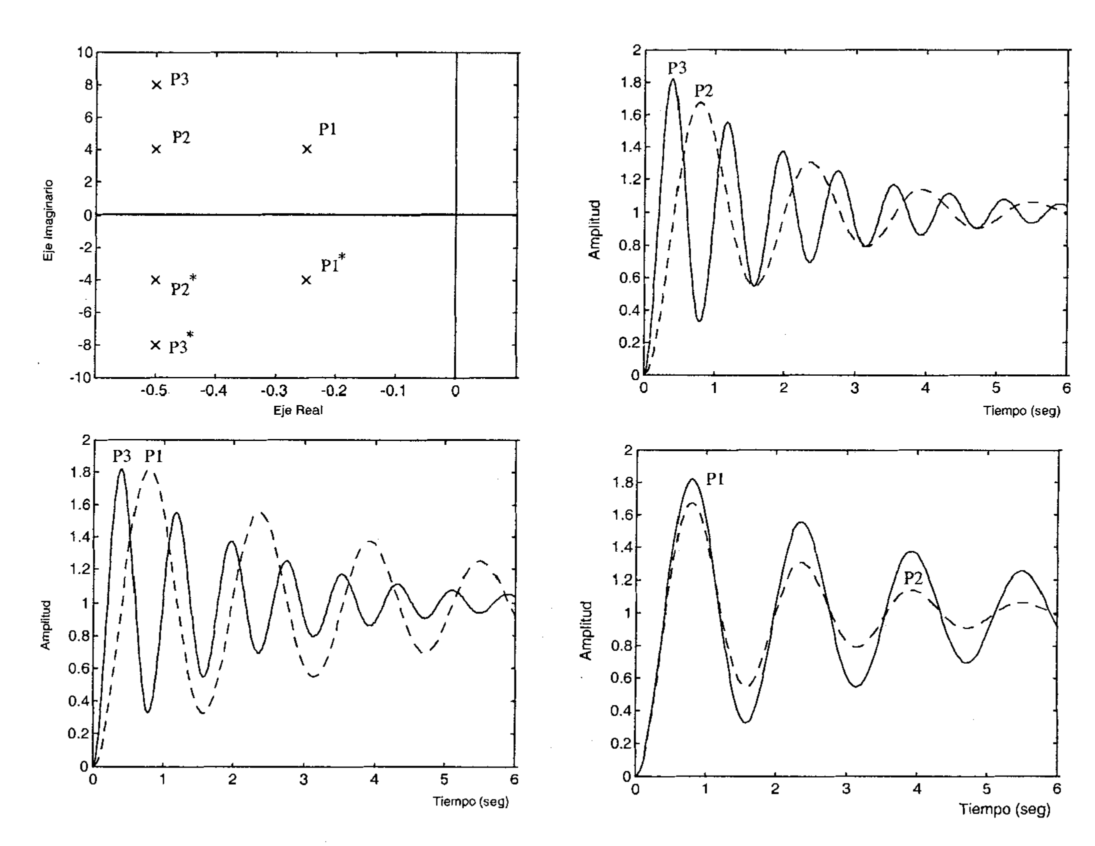


Fig 2.8 Respuestas al escalón de sistemas de segundo orden

Ejemplo 2.1

En la figura 2.9. se muestra un amplificador magnético con una baja impedancia de salida, en cascada con un filtro paso-bajo y un preamplificador. El amplificador tiene una elevada impedancia de entrada así como ganancia unitaria, y se usa para sumar las señales tal y como se muestra en la figura.

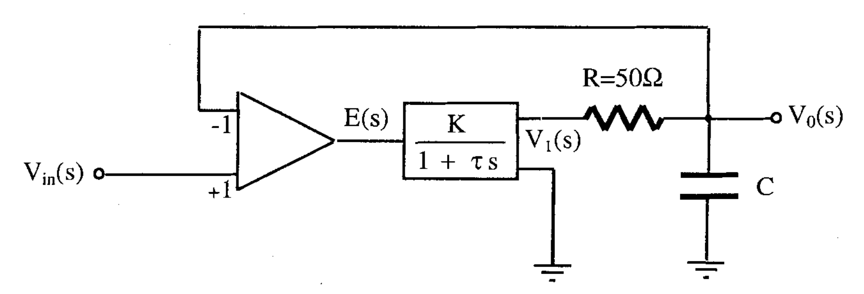


Fig. 2.9 Amplificador magnético en cascada con un filtro paso-bajo y preamplificador

Calcular el valor de la capacidad C, de tal forma que la función de transferencia $V_0(s)/V_{in}(s)$ tenga una relación de amortiguamiento $\xi = 0.7$.

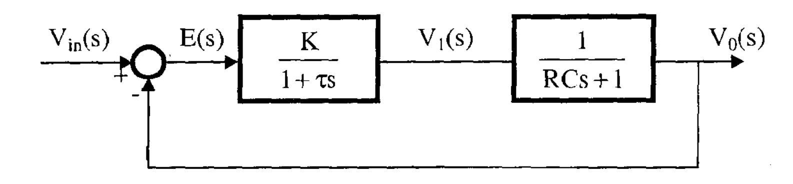
Si la constante de tiempo del amplificador magnético es igual a 1 seg. (τ = 1 seg.) y la ganancia es K=20. Calcular el tiempo de estabilización del sistema resultante.

Nota: Tiempo de estabilización $\Rightarrow$ $ts = \dfrac{4}{\xi\omega_n}$

Solución:

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_0(s)}{V_1(s)} &= \frac{1/Cs}{R + 1/Cs} \\ \frac{V_1(s)}{E(s)} &= \frac{K}{1+\tau s} \end{aligned}\right\} \quad \frac{V_0(s)}{E(s)} = \frac{K}{1+\tau s}\cdot\frac{1/Cs}{R + 1/Cs} = \frac{K}{1+\tau s}\cdot\frac{1}{RCs+1}$$

Obtenemos entonces el diagrama de bloques siguiente :



$$G(s) = \frac{V_0(s)}{E(s)} = \frac{20}{(1+s)}\cdot\frac{1}{(50Cs+1)}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{V_0(s)}{V_{in}(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{20}{(1+s)\cdot(50Cs+1)+20} = \frac{20}{50Cs^2+(1+50C)s+21}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{20/50C}{s^2 + \dfrac{1+50C}{50C}s + \dfrac{21}{50C}}$$

Para calcular el tiempo de estabilización, es necesario conocer ξ y ω_n, ya que $ts = 4/\xi\omega_n$. Si ξ debe valer 0.7:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1+50C}{50C} &= 2\xi\omega_n = 2\cdot 0.7\cdot\omega_n \\ \frac{21}{50C} &= \omega_n^2 \end{aligned}\right\} \quad \frac{1+50C}{50C} = 1.4\cdot\sqrt{\frac{21}{50C}}$$

$$1+100C+2500C^2 = 1.96\cdot 21\cdot 50C \ ; \quad 2500C^2 - 1958C + 1 = 0 \ \rightarrow \ C = \begin{cases} 0.7826\ F \\ 5.11\cdot 10^{-4}\ F \end{cases}$$

Desechamos el valor de *C=0.7826 F* por ser un valor físicamente muy grande, además de que provoca un tiempo de establecimiento mayor.

Escogeremos por lo tanto: $C = 5.11\cdot10^{-4}$ F

$$\omega_n = \sqrt{\frac{21}{50C}} = \sqrt{\frac{21}{50\cdot5.11\cdot10^{-4}}} = 28.7 \text{ rad / s}$$

El tiempo de estabilización quedará entonces como:

$$ts = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{0.7\cdot28.7} = 0.2 \text{ seg.}$$

2.2.2 Sistemas de orden superior.

Un sistema de orden superior (supuesto estable) puede caracterizarse mediante una función de transferencia, que admite una expresión de la respuesta a una entrada escalón unitario de la forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k\cdot\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{q}(s+p_j)\cdot\prod_{k=1}^{r}(s^2+2\xi_k\omega_k s+\omega_k^2)} \rightarrow C(s) = \frac{k\cdot\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{q}(s+p_j)\cdot\prod_{k=1}^{r}(s^2+2\xi_k\omega_k s+\omega_k^2)}\cdot\frac{1}{s}$$

Desarrollando en fracciones parciales y aplicando la antitransformada de Laplace:

$$c(t) = a\cdot u(t) + \sum_{j=1}^{q} a_j\cdot e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^{r}\left[b_k\cdot e^{-\xi_k\omega_k t}\cos(\omega d_k\cdot t) + c_k\cdot e^{-\xi_k\omega_k t}\,\text{sen}(\omega d_k\cdot t)\right]$$

En la expresión aparecen términos que dependen de la parte real de los polos. Dos consideraciones permiten aproximar la dinámica de un sistema de orden superior por la dinámica de un sistema de primer o segundo orden.

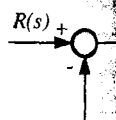
Cancelación cero-polo: Se basa en el análisis resultante en la determinación del valor de los residuos cuando el polo se encuentra cercano a un cero; en este caso, puede expresarse $z_i = p_i + \varepsilon$, donde $\varepsilon \rightarrow 0$. El cálculo del residuo resulta:

$$a_i = \lim_{s\to -p_i} \frac{k\cdot\prod_{h=1}^{m}(s+z_h)}{s\cdot\prod_{j=1}^{q}(s+p_j)\cdot\prod_{k=1}^{r}(s^2+2\xi_k\omega_k s+\omega_k^2)}\cdot(s+p_i)\to$$

$$a_i = \varepsilon\cdot\lim_{s\to -p_i} \frac{k\cdot\prod_{h=1}^{m}(s+z_h)}{s\cdot\prod_{j=1}^{q}(s+p_j)\cdot\prod_{k=1}^{r}(s^2+2\xi_k\omega_k s+\omega_k^2)}$$

en la segunda expresión no existen los términos (s+zi) en numerador ni (s+pi) en denominador. En conclusión, en el caso en el cual el polo y el cero se encuentren muy cercanos, $\varepsilon \to 0 \Rightarrow ai \to 0$, perdiendo importancia el término exponencial de la respuesta transitoria originado por este polo frente al resto de términos de la respuesta total. De este modo puede simplificarse en un orden la dinámica del sistema. Debe considerarse que se obtienen resultados análogos en el caso de poseer ceros complejo-conjugados cercanos a polos complejo-conjugados, lo cual permite generalizar esta aproximación a cualquier tipo de sistemas de orden superior.

Aproximación de polos dominantes: Los polos más alejados del eje imaginario poseen constantes de tiempo menores (sean o no reales, en el caso de raíces complejo-conjugadas existe una dependencia respecto a su parte real), de manera que puede afirmarse que las exponenciales debidas a estos polos son importantes en el inicio de la respuesta transitoria, pero que decaen a cero mucho más rápidamente que las exponenciales debidas a raíces con constantes de tiempo mayores. Son estas últimas las que caracterizan plenamente la respuesta transitoria (exceptuando en el origen de la respuesta) y permiten reducir el orden del sistema; se dice en este caso que "dominan" la respuesta del sistema, despreciándose el efecto de las raíces con parte real mayor (en valor absoluto).



2.3 Respuesta transitoria de sistemas discretos.

2.3.1 Sistema de control discreto en lazo cerrado.

Estructura típica de un sistema de control discreto en lazo cerrado:

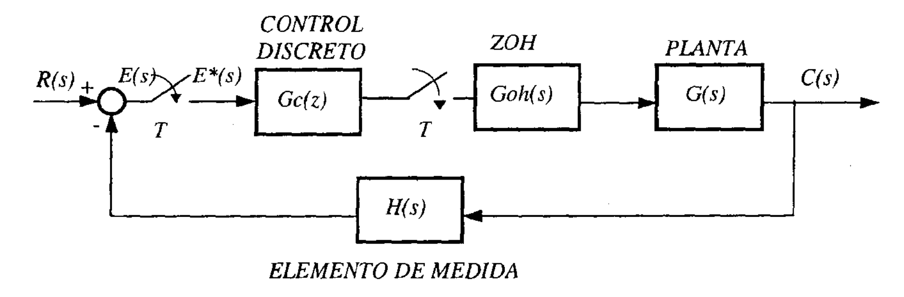


Fig 2.10 Estructura típica de un sistema de control discreto en lazo cerrado

El control discreto es caracterizado a través de su función de transferencia en Z y es diseñado para cumplir las especificaciones requeridas al sistema.

Se define el *sistema continuo equivalente* de un sistema discreto como aquel sistema que resulta de eliminar los muestreadores y mantenedores de datos del sistema discreto.

Las respuestas temporales del sistema discreto y del sistema continuo equivalente difieren substancialmente a medida que aumenta el periodo de muestreo, de este modo se dice que *el muestreo desvirtúa la respuesta del sistema discreto frente a la del sistema continuo equivalente.* En concreto, el muestreo tiene un efecto desestabilizador del sistema, de manera que, cuanto más desvirtuado se halla el sistema discreto frente al sistema analógico, "peor" es su respuesta transitoria. Este efecto conlleva una pérdida de la estabilidad relativa del sistema discreto a medida que aumenta el periodo de muestreo.

Ejemplo 2.2

Dado los siguientes sistemas:

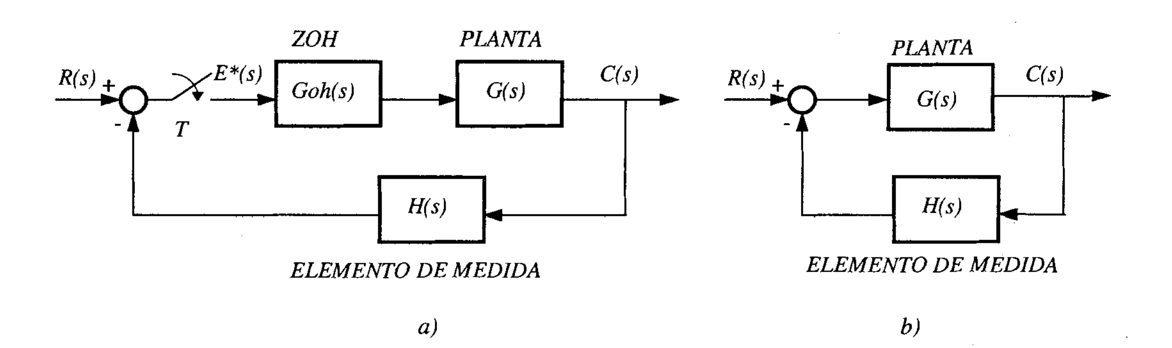


Fig. 2.11 a) Sistema discreto
b) Sistema continuo equivalente

Con las siguientes funciones de transferencias:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}; H(s) = 1$$

Se puede observar el efecto desestabilizador al aumentar el periodo de muestreo en las siguientes gráficas:

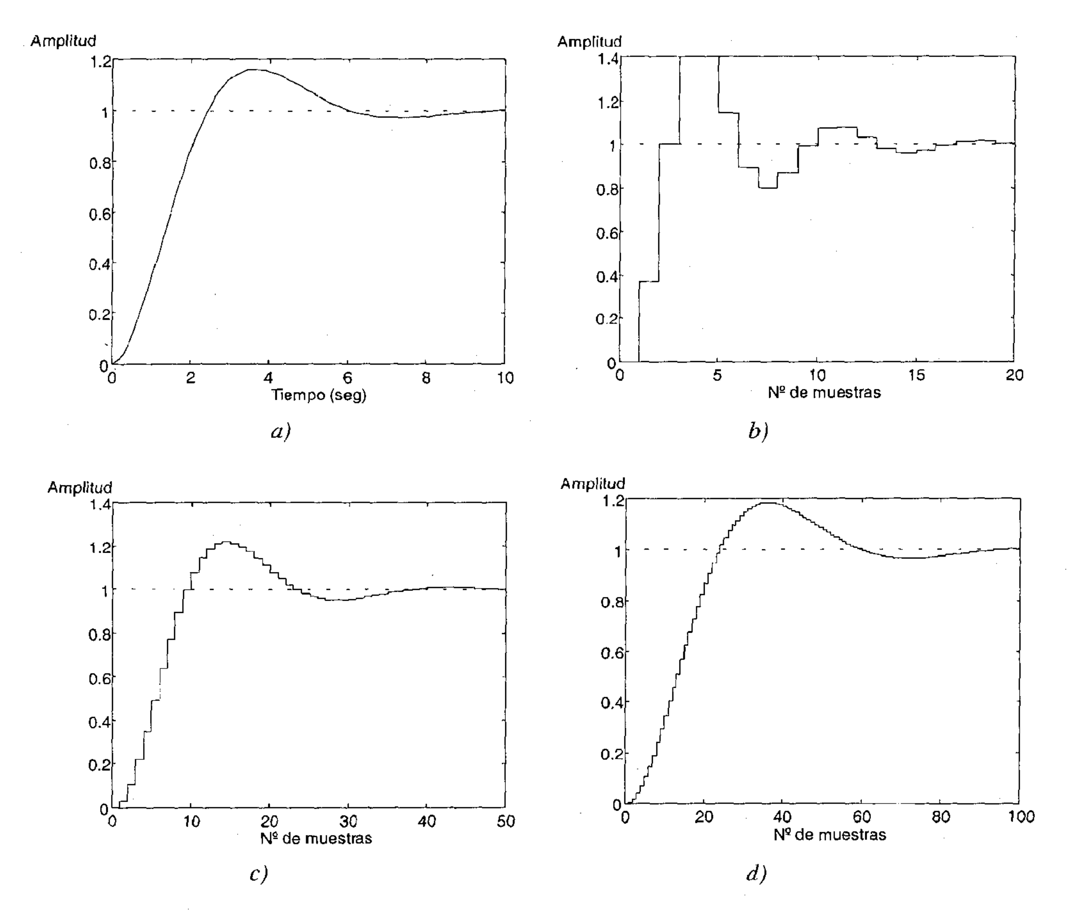


Fig. 2.12 a) Respuesta al escalón del sistema equivalente
b) Respuesta al escalón del sistema discreto con T=1seg.
c) Respuesta al escalón del sistema discreto con T=0.25seg.
d) Respuesta al escalón del sistema discreto con T=0.1seg.

Los parámetros de medida de este proceso son, fundamentalmente, dos:

* Número de muestras por constante de tiempo:

Corresponde a la expresión: τ/T . Se considera que si se poseen más de 5 muestras por constante de tiempo de la respuesta del sistema discreto no queda desvirtuada frente a la respuesta del sistema continuo equivalente. Obsérvese que τ es la constante de tiempo más pequeña del sistema continuo equivalente.

* Número de muestras por ciclo:

Corresponde a la expresión: Td/T. En este caso no existe ningún criterio al respecto, pero se considera que son suficientes 10 muestras por ciclo para poder decir que la respuesta no queda desvirtuada.

Obsérvese que, análogamente al caso anterior, Td es el periodo de señal respuesta del sistema continuo equivalente.

2.3.2 Correlación entre el plano S y el plano Z.

Recordando la definición de transformada Z: $z = e^{Ts} = e^{-\sigma T} \cdot e^{\pm j\omega T} = e^{-\sigma T} \cdot [\cos(\omega T) \pm j \cdot \sin(\omega T)]$

Transformación de rectas de parte real constante:

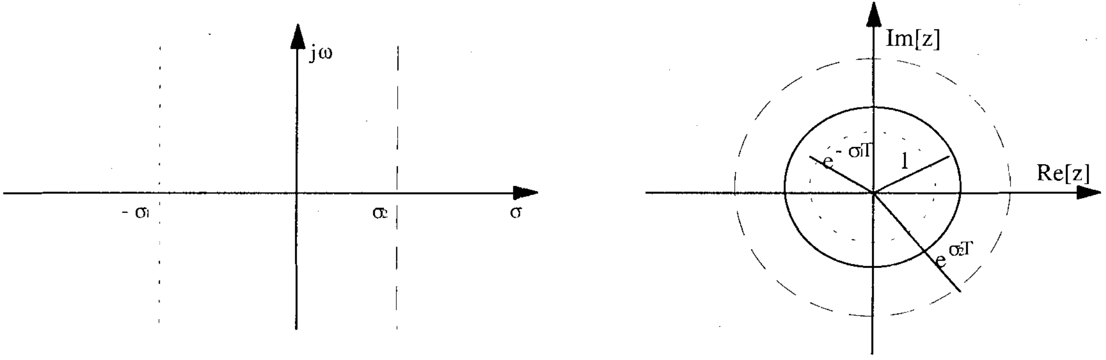


Fig. 2.13 Transformación de rectas de parte real constante del plano S al Z

Transformación de rectas de parte imaginaria constante:

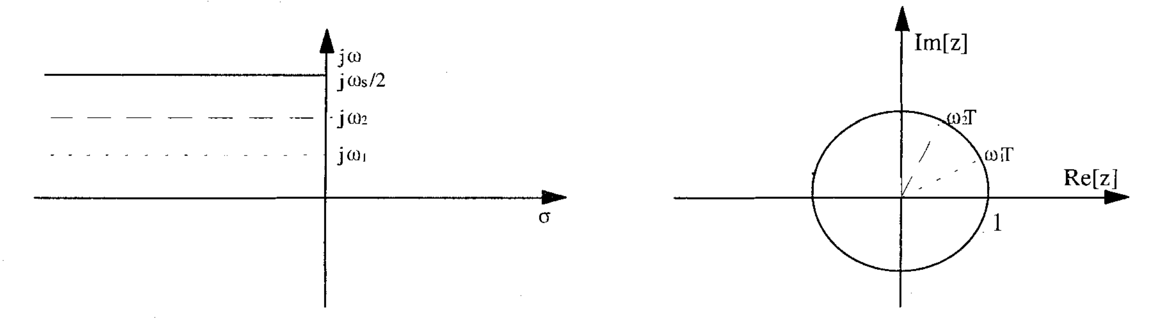


Fig. 2.14 Transformación de rectas de parte imaginaria constante del plano S al Z

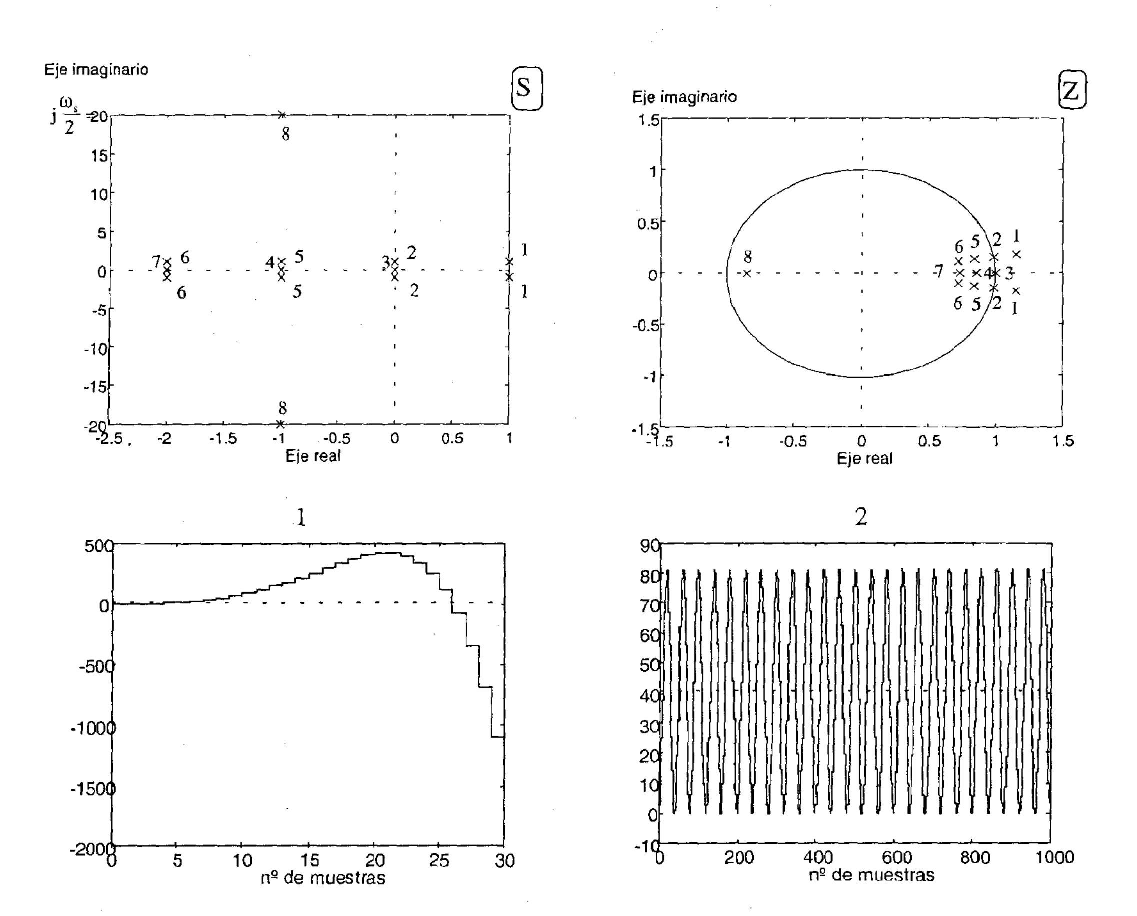
Debe observarse que cuanto más pequeñas son la parte real (en valor absoluto) y la parte imaginaria de las raíces en plano S, más cercanas se encuentran las raíces transformadas al punto z=1 en el plano Z.

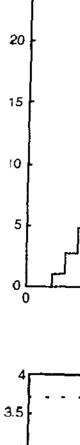
Como se ha comentado anteriormente, puede afirmarse que el sistema discreto y el sistema continuo equivalente ofrecen dinámicas similares cuando el número de muestras por ciclo y el número de muestras por constante de tiempo es suficientemente elevado (en este caso se dice que el sistema no está desvirtuado). Estas indicaciones conllevan a que las raíces características en plano S sean tales que mantengan elevadas las relaciones: $\frac{\omega_s}{\omega_d} = \frac{T_d}{T}$ y $\frac{\tau}{T}$ o, equivalentemente, $\frac{1}{\sigma T}$. En conclusión, un

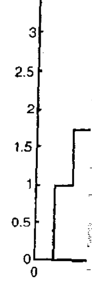
sistema discreto no queda desvirtuado frente al sistema continuo equivalente cuando las raíces transformadas en plano Z se encuentren en el interior del circulo de radio unidad y cercanas al punto z=1. En estos casos, pueden asignarse al sistema discreto las mismas características dinámicas que posee el sistema continuo equivalente. De hecho, no es posible conocer las características que presenta la respuesta de un sistema discreto cuando las raíces en plano Z se encuentran alejadas del punto z=1, si no es resolviendo la antitransformada Z de la señal de salida.

Mediante la observación de la expresión de la transformada Z, se puede afirmar que el aumento del período de muestreo provocará un alejamiento de las raíces transformadas de la zona del plano Z en la cual se garantiza una respuesta del sistema discreto no desvirtuada frente al sistema continuo equivalente.

En la figura siguiente se muestran las respuestas obtenidas en función de la ubicación de las raíces en plano S y en plano Z.







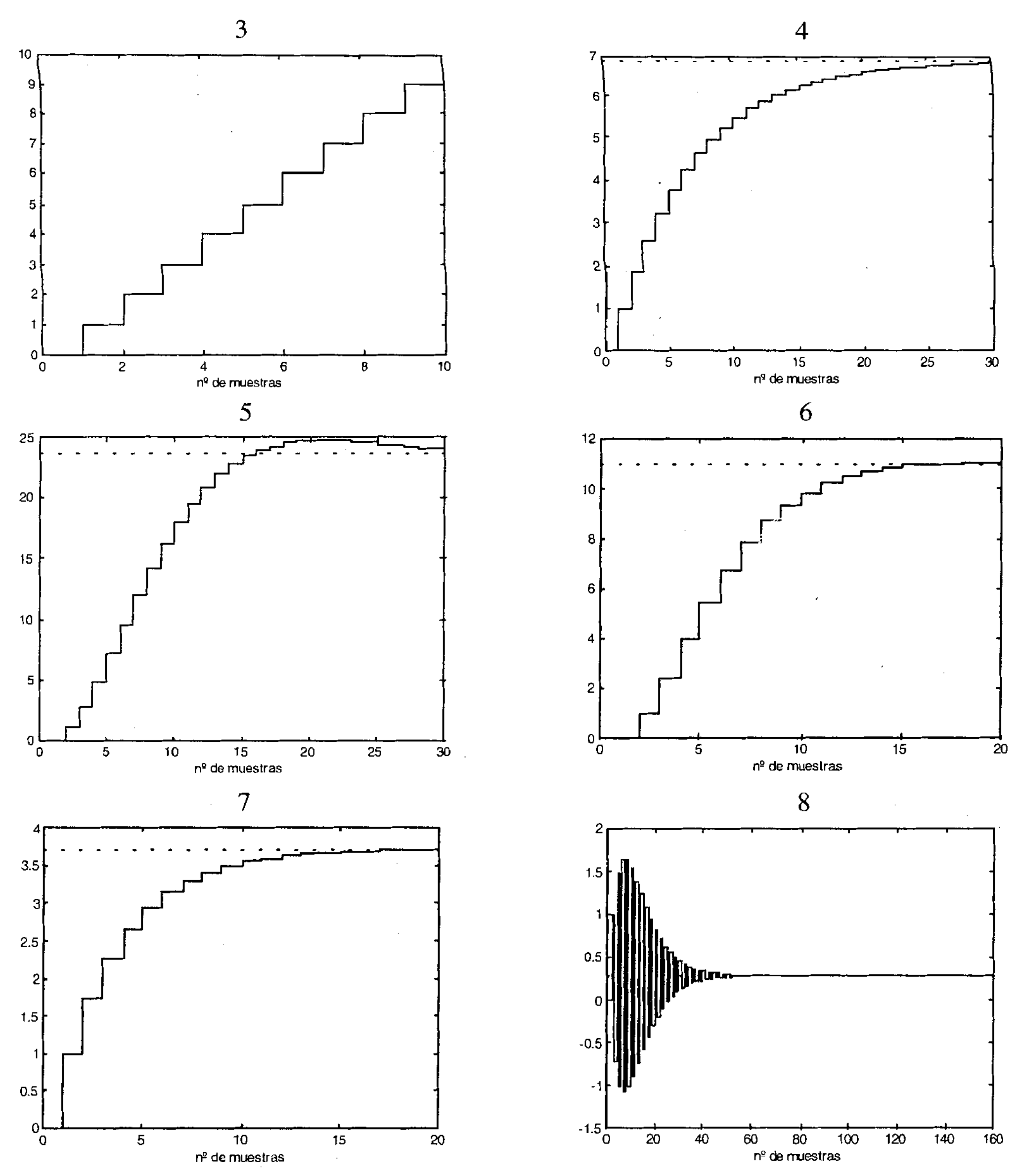


Fig. 2.15 Posiciones de polos correspondientes entre el plano S y el Plano Z y características de respuesta transitoria.

2.4 Estabilidad absoluta de sistemas lineales.

2.4.1 Estabilidad en sistemas de tiempo continuo.

Se ha comentado anteriormente que la estabilidad absoluta de un sistema lineal se logra cuando la respuesta transitoria decae a cero al tender el tiempo a infinito. Se puede demostrar que para que un

sistema lineal sea estable es necesario que posea todos los polos de su función de transferencia en el semiplano izquierdo del plano transformado S.

En sistemas de control, el problema fundamental es la determinación de las raíces del sistema en Lazo Cerrado a partir del conocimiento de las raíces en Lazo Abierto. Recordando la expresión de la función de transferencia en Lazo Cerrado.

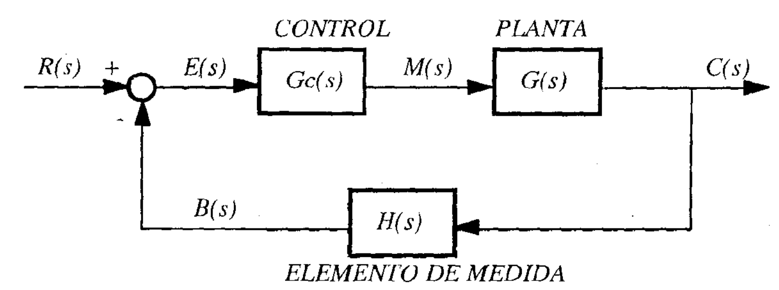


Fig. 2.16 Estructura de un sistema de control en lazo cerrado

$$G_{LC}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Gc(s)\cdot G(s)}{1 + Gc(s)\cdot G(s)\cdot H(s)}$$

La ecuación característica del sistema en Lazo Cerrado $1+Gc(s)G(s)H(s) = 0$ no es fácilmente resoluble en general; por ello aparecen métodos algorítmicos para poder determinar la estabilidad de un sistema en lazo cerrado, el más importante de estos métodos es el criterio de estabilidad de Routh (CER).

El criterio de estabilidad de Routh permite determinar el número de raíces de una ecuación de variable compleja que se encuentran en el semiplano derecho, utilizándose, de este modo, para determinar si existen polos de una función de transferencia en el semiplano derecho del plano transformado S.

Criterio de estabilidad de Routh (CER):

El criterio de estabilidad de Routh es un criterio de estabilidad absoluta. Se basa en la determinación del número de raíces de un polinomio que se encuentran en el semiplano derecho del plano S. Para su aplicación deben verificarse dos condiciones:

- Condición necesaria:

Dada la función de transferencia: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0\cdot s^m + b_1\cdot s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0\cdot s^n + a_1\cdot s^{n-1} + \dots + a_n}$, debe escribirse el denominador de la forma: $a_0\cdot s^n + a_1\cdot s^{n-1} + \dots + a_n = 0$, con $a_n \neq 0$ (se eliminan las raíces en el eje imaginario). Criterio: Si existe algún coeficiente negativo o cero en presencia de algún coeficiente positivo, entonces existen una o más raíces imaginarias puras o con parte real positiva, lo cual implica que el sistema es inestable. En otros términos, para garantizar estabilidad, a partir del primer $a_i \neq 0$ todos los coeficientes deben estar presentes y ser positivos.

- Condición suficiente:

Debe aplicarse el algoritmo de formación siguiente: $a_0 \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \ldots + a_n = 0$.

$$\left\langle \begin{array}{l|lllll} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ s^2 & e_1 & e_2 & & & \\ s^1 & f_1 & & & & \\ s^0 & g_1 & & & & \end{array} \right\rangle$$

Las primeras filas se obtienen directamente del polinomio característico, el resto de coeficientes se obtienen según las expresiones:

$$b_1 = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_1}; \; b_2 = \frac{a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_5}{a_1}; \; b_3 = \frac{a_1 \cdot a_6 - a_0 \cdot a_7}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_3 - a_1 \cdot b_2}{b_1}; \; c_2 = \frac{b_1 \cdot a_5 - a_1 \cdot b_3}{b_1}; \; c_3 = \frac{b_1 \cdot a_7 - a_1 \cdot b_4}{b_1}$$

Como observación debe indicarse que puede multiplicarse o dividirse toda una fila por una constante positiva.

El *criterio de estabilidad de Routh* determina que el número de raíces con parte real positiva del polinomio estudiado es igual al número de cambios de signo de la primera columna del algoritmo de formación.

De este modo la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea estable es:

- Todos los coeficientes del polinomio característico deben existir y ser positivos.

- Todos los coeficientes de la primera columna del algoritmo de formación deben de ser positivos.

Ejemplo 2.3

$a_0 \cdot s^3 + a_1 \cdot s^2 + a_2 \cdot s + a_3 = 0$

Condición necesaria $\Rightarrow a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$

Algoritmo: $\left\langle \begin{array}{c|cc} s^3 & a_0 & a_2 \\ s^2 & a_1 & a_3 \\ s^1 & \dfrac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_1} & \\ s^0 & a_3 & \end{array} \right\rangle$, condición suficiente

$$\Rightarrow \frac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_1} > 0 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$$

Ejemplo 2.4

$s^4 + 2 \cdot s^3 + 3 \cdot s^2 + 4 \cdot s + 5 = 0$

Se verifica la condición necesaria

Algoritmo: $\left\langle \begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & 2 & 4 & \\ s^2 & 1 & 5 & \\ s^1 & -6 & & \\ s^0 & 5 & & \end{array} \right\rangle$, condición suficiente $\Rightarrow$ existen dos cambios de signo $\Rightarrow$

existen dos raíces con parte real positiva $\Rightarrow$ el sistema es inestable.

* Casos especiales en el algoritmo de Routh.

1) Un término de la primera columna es cero en presencia de otros diferentes de cero.

Cuando esta situación ocurre, puede afirmarse que el sistema es inestable. Para determinar la ubicación de las raíces que proporcionan la inestabilidad debe realizarse el siguiente procedimiento:

- Sustituir el cero por $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon << 1$.

- Aplicar el procedimiento habitual.

- Aplicar el criterio: Si los coeficientes superior e inferior a ε son de igual signo$\Rightarrow$existen raíces sobre el eje imaginario; si los coeficientes superior e inferior tienen signo diferente$\Rightarrow$existen raíces en semiplano derecho.

Ejemplo 2.5

$s^3 + 2 \cdot s^2 + s + 2 = 0$

Se verifica la condición necesaria.

Algoritmo: $\left\langle \begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & 0 \approx \varepsilon & \\ s^0 & 2 & \end{array} \right\rangle$, no hay cambio de signo $\Rightarrow$ existen raíces en el eje imaginario.

* Ejemplo: $s^3 - 3 \cdot s + 2 = 0$

No se verifica la condición necesaria $\Rightarrow$ el sistema es inestable.

Algoritmo: $\left\langle \begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & -3 \\ s^2 & 0 \approx \varepsilon & 2 \\ s^1 & -3 - \dfrac{2}{\varepsilon} & \\ s^0 & 2 & \end{array} \right\rangle$, condición suficiente $\Rightarrow$ existen dos cambios de signo $\Rightarrow$

existen dos raíces con parte real positiva. De hecho, $s^3 - 3 \cdot s^2 + 2 = (s-1)^2 \cdot (s+2) = 0$

2) Todos los coeficientes de una fila son cero.

Cuando esta situación ocurre, puede afirmarse que el sistema es inestable. Existen raíces de igual valor simétricas respecto a los ejes. Para determinar la ubicación de las raíces que proporcionan la inestabilidad debe realizarse el siguiente procedimiento:

- Sustituir la fila de ceros por la derivada del "polinomio auxiliar" Pa(s).

Pa(s): polinomio formado por los coeficientes de la fila anterior a la de ceros. Debe indicarse que las raíces de Pa(s) son raíces del polinomio característico.

- Aplicar el procedimiento habitual.

Ejemplo 2.6

$s^5 + 2 \cdot s^4 + 24 \cdot s^3 + 48 \cdot s^2 - 25 \cdot s - 50 = 0$

No se verifica la condición necesaria.

$$\text{Algoritmo: } \left\langle \begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \\ s^3 & 0 & 0 & \end{array} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \\ s^3 & 8 & 96 & \\ s^2 & 24 & -50 & \\ s^1 & 112.7 & & \\ s^0 & -50 & & \end{array} \right\rangle,$$

dado que $Pa(s) = 2 \cdot s^4 + 48 \cdot s^2 - 50 \Rightarrow \frac{dPa(s)}{ds} = 8 \cdot s^3 + 96 \cdot s$

Existe un cambio de signo $\Rightarrow$ existe una raíz con parte real positiva. Además, pueden obtenerse las raíces simétricas calculando $Pa(s) = 2 \cdot s^4 + 48 \cdot s^2 - 50 = 0 \Rightarrow s = \pm 1; s = \pm j5$. La restante raíz se determina dividiendo el polinomio inicial entre el polinomio auxiliar (obteniéndose s=-2).

Ejemplo 2.7

El criterio de estabilidad de Routh puede utilizarse para determinar el valor máximo de una ganancia para el cual el sistema alcanza la estabilidad crítica o límite. Supóngase el sistema en lazo cerrado siguiente:

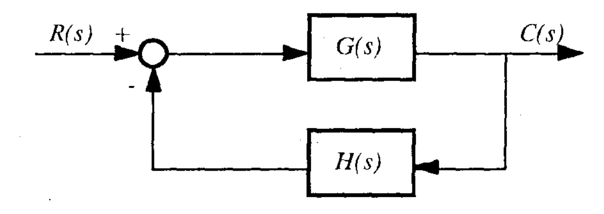


Fig. 2.1. Diagrama de bloques de sistema en lazo cerrado

$$G(s) = \frac{k \cdot (s+40)}{s \cdot (s+10)}; \; H(s) = \frac{1}{s+20}$$

La función de transferencia en lazo cerrado es: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k \cdot \left(s^2 + 60 \cdot s + 800\right)}{s^3 + 30 \cdot s^2 + (200 + k) \cdot s + 40 \cdot k}$

El rango de valores de ganancia k para el cual el sistema es estable quedará establecido al aplicar el criterio de Estabilidad de Routh sobre el polinomio característico:

$s^3 + 30 \cdot s^2 + (200 + k) \cdot s + 40 \cdot k$ $\Rightarrow$ Se verifica la condición necesaria para valores de k positiva.

Algoritmo:

s^3	1	$200+k$
s^2	30	$40\cdot k$
s^1	$\frac{30\cdot 200-10\cdot k}{30}$	
s^0	$40\cdot k$	

, para que el sistema sea estable

$\Rightarrow$ k<600. En conclusión, el rango de valores de k para los que permanece el sistema estable es: 0<k<600.

Para k=600 el sistema se encuentra sobre la estabilidad límite siendo oscilatorio; puede determinarse la frecuencia de oscilación calculando las raíces imaginarias que la caracterizan. Considerando el polinomio auxiliar:

$$Pa(s) = 30\cdot s^2 + 40\cdot k = 0, \text{cuando } k = 600 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{800} \Rightarrow fosc = \frac{\sqrt{800}}{2\pi}(Hz)$$

2.4.2 Estabilidad en sistemas de tiempo discreto.

Se puede demostrar que un sistema discreto es estable cuando posee todos los polos de su función de transferencia en el interior del circulo de radio unidad en el plano transformado Z.

La función de transferencia del sistema de control discreto de la figura se puede expresar:

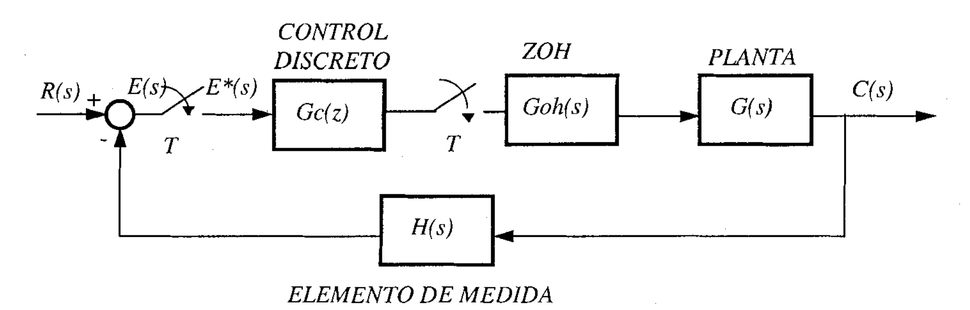


Fig. 2.18 Diagrama de bloques de sistema de control discreto en lazo cerrado

$$G_{LC}(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{Gc(z)\cdot GohG(z)}{1+Gc(z)\cdot GohGH(z)}$$

donde la ecuación característica del sistema en lazo cerrado 1+Gc(z)GohGH(z)=0 no es fácilmente resoluble y deben buscarse métodos transformados para poder determinar la posición de sus raíces.

En este caso, la aplicación directa del criterio de estabilidad de Routh no es útil, porque determina el número de raíces de la ecuación característica que se encuentran en semiplano derecho y no en el

exterior del circulo de radio unidad. Sin embargo, sí es posible aplicar el CER tras una transformación que convierta el interior y el exterior del circulo de radio unidad en un semiplano izquierdo y un semiplano derecho respectivamente; a esta transformación se le denomina *transformación bilineal.*

* Transformación bilineal.

La definición de la transformación bilineal no es única; sin embargo, la más conocida se realiza mediante el cambio de variable: $z = \dfrac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}$; $w = \dfrac{2}{T}\cdot\dfrac{z-1}{z+1}$. (2.9)

La transformación del circulo de radio unidad ofrece el resultado:

$$w = \frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T}\cdot\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1} = j\frac{2}{T}\cdot\frac{\operatorname{sen}\left(\omega T/2\right)}{\cos\left(\omega T/2\right)}$$

$w = j\dfrac{2}{T}\cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\omega T}{2}\right)$, que, efectivamente, corresponde con el eje imaginario del plano transformado W.

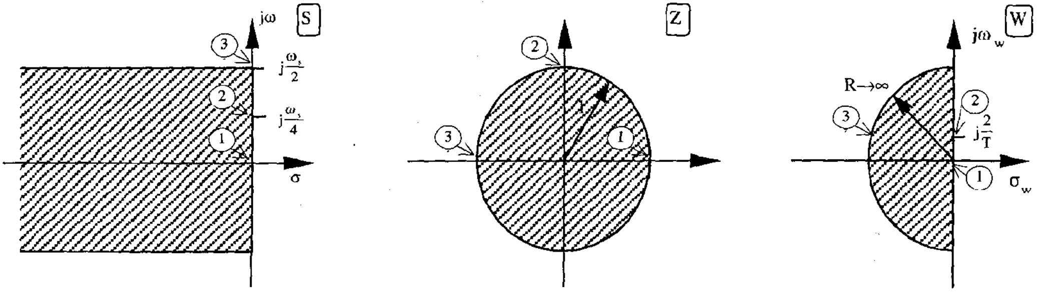


Fig. 2.19 Relación entre los planos S, Z y W

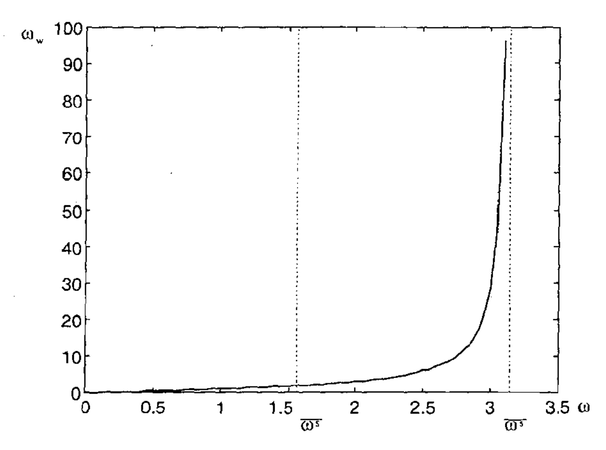


Fig. 2.20 Relación entre los ejes imaginarios del plano S y del plano W

En conclusión, el circulo de radio unidad del plano Z se transforma, mediante la transformada bilineal, en el eje imaginario del plano W, de manera que puede aplicarse en dicho plano el criterio de estabilidad de Routh para determinar la estabilidad de un sistema discreto.

Ejemplo 2.8

Puede analizarse la estabilidad del sistema discreto de la siguiente figura

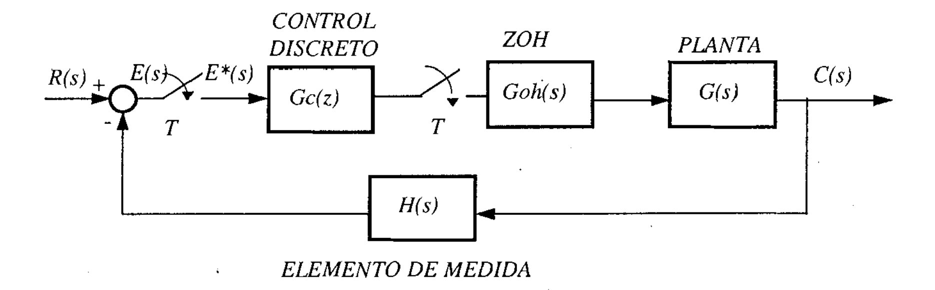


Fig. 2.21 Diagrama de bloques de sistema de control discreto en lazo cerrado

donde:

$$Gc(z) = 1;\; H(s) = 1;\; G(s) = \frac{k}{s\cdot(s+1)};\; T = 0.1 \text{ seg.}$$

para ello, debe encontrarse la función de transferencia en lazo abierto como:

$$G_{LA}(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{k}{s\cdot(s+1)}\right] = (1-z^{-1})\cdot Z\left[\frac{k}{s^2\cdot(s+1)}\right] = k\cdot\frac{0.0048z+0.00468}{(z-1)\cdot(z-0.905)}$$

aplicando la transformada bilineal:

$$z = \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w} = \frac{1+0.05w}{1-0.05w} \Rightarrow G_{LA}(w) = k\cdot\frac{-0.00016w^2-0.1872w+3.81}{3.81w^2+3.8w}$$

obteniendo la ecuación característica: $1+G_{LA}(w)=0$

$$(3.81-0.00016\cdot k)\cdot w^2+(3.8-0.1872\cdot k)\cdot w+3.81\cdot k = 0$$

El resultado, aplicando el criterio de estabilidad de Routh, indica que el sistema es estable para los valores de k: 0<k<20.3. En concreto, para k=20.3 se pueden obtener los puntos de corte con el eje imaginario en plano W para, posteriormente, determinar la frecuencia de oscilación del sistema discreto. Así, considerando del polinomio auxiliar:

$$(3.81-0.00016\cdot 20.3)\cdot w^2+3.81\cdot 20.3=0 \Rightarrow w=\pm j4.5075$$

La frecuencia de oscilación es: $\omega=\frac{2}{T}\cdot tg^{-1}\left(\frac{\omega_w T}{2}\right)=\frac{2}{0.1}\cdot tg^{-1}\left(\frac{4.5075\cdot 0.1}{2}\right)=4.433\ rad/seg$; resultado muy parecido a la frecuencia que se obtenía en plano W debido a que la frecuencia de muestreo es suficientemente elevada ($\omega_s=2\pi/T=62.83\ rad/seg.$).

Debe observarse que, así como un sistema continuo de segundo orden con realimentación unitaria siempre es estable (partiendo de un sistema en lazo abierto estable), un sistema discreto no tiene por qué serlo debido al efecto desestabilizador del periodo de muestreo. En concreto, realizando el mismo ejemplo con un periodo de muestreo mayor (por ejemplo T=1 seg), el margen de valores de ganancia para garantizar estabilidad disminuye (0<k<2.39).

2.5 Análisis en régimen estacionario.

Un sistema lineal estable alcanza el régimen o estado estacionario cuando, al ser excitado por una señal de entrada, la respuesta transitoria decae a cero.

En sistemas de control, la precisión o exactitud del sistema se convierte en una de las especificaciones más importantes que verificar; el sistema de control debe 'seguir' la señal de referencia en estado estacionario del modo más preciso posible. Por esta razón, en sistemas de control en lazo cerrado se obtienen las expresiones de los errores estacionarios del sistema en función del tipo de señal de referencia introducida y de las funciones de transferencia que contiene.

Analizando el diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado se obtiene la señal de error como:

$$E(s)=\frac{R(s)}{1+G_{LA}(s)}$$

Se define el error en estado estacionario: $e_{ss}\equiv\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s\cdot R(s)}{1+G_{LA}(s)}$

Particularizando para los diversos tipos de entradas:

* Error estacionario de posición:

$$r(t)=u(t)\rightarrow e_{ssp}=\frac{1}{1+k_p} \qquad (2.10)$$

$$k_p = \lim_{s \to 0} G_{LA}(s) \longrightarrow \text{coeficiente de posición.}$$

* Error estacionario de velocidad:

$$r(t) = t \longrightarrow e_{ssv} = \frac{1}{k_v} \tag{2.11}$$

$$k_v = \lim_{s \to 0} s \cdot G_{LA}(s) \longrightarrow \text{coeficiente de velocidad.}$$

* Error estacionario de aceleración:

$$r(t) = \frac{t^2}{2} \longrightarrow e_{ssa} = \frac{1}{k_a} \tag{2.12}$$

$$k_a = \lim_{s \to 0} s^2 \cdot G_{LA}(s) \longrightarrow \text{coeficiente de aceleración.}$$

Obsérvese que, cuanto mayores son los coeficientes de error, menor es el error estacionario correspondiente cometido. El error en estado estacionario en lazo cerrado puede obtenerse a partir de la función de transferencia en lazo abierto, de modo que, cuanto mayor es su valor en continua (para frecuencia cero) menor es el error cometido. Para poder eliminar el error de posición es necesario que la función de transferencia en lazo abierto contenga un polo en origen; en este caso se dice que existe un elemento integrador en dicha función.

Por último, señalar que este error estacionario no es más que el valor que adquiere la señal de salida del detector de error en estado estacionario. En el caso en el cual la realimentación fuese unitaria, coincidiría con la diferencia que se tendría en estado estacionario entre la señal de referencia y la señal de salida del sistema. Si la realimentación no es unitaria, existirá un factor de proporcionalidad entre ambas señales que vendrá determinado por el elemento de medida.

Las expresiones de los errores estacionarios de un sistema de control discreto en lazo cerrado son:

Análogamente al caso anterior: Señal de error: $E(z) = \dfrac{R(z)}{1 + G_{LA}(z)}$

Error en estado estacionario: $e_{ss} \equiv \lim_{k \to \infty} e(kT) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \cdot E(z) = \lim_{z \to 1} \dfrac{(1 - z^{-1}) \cdot R(z)}{1 + G_{LA}(z)}$

* Error estacionario de posición:

$$r(t) = u(t) \longrightarrow e_{ssp} = \frac{1}{1 + k_p} \tag{2.13}$$

$$k_p = \lim_{z \to 1} G_{LA}(z) \rightarrow \text{coeficiente de posición.}$$

* Error estacionario de velocidad:

$$r(t) = t \rightarrow e_{ssv} = \frac{1}{k_v} \qquad (2.14)$$

$$k_v = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{T} \cdot G_{LA}(z) \rightarrow \text{coeficiente de velocidad.}$$

* Error estacionario de aceleración:

$$r(t) = \frac{t^2}{2} \rightarrow e_{ssa} = \frac{1}{k_a} \qquad (2.15)$$

$$k_a = \lim_{z \to 1} \frac{(z-1)^2}{T^2} \cdot G_{LA}(z) \rightarrow \text{coeficiente de aceleración.}$$

Ejemplo 2.9

La figura 2.29 muestra los elementos de un control automático de ganancia (CAG) que se utiliza para mantener constante el nivel de salida de un amplificador.

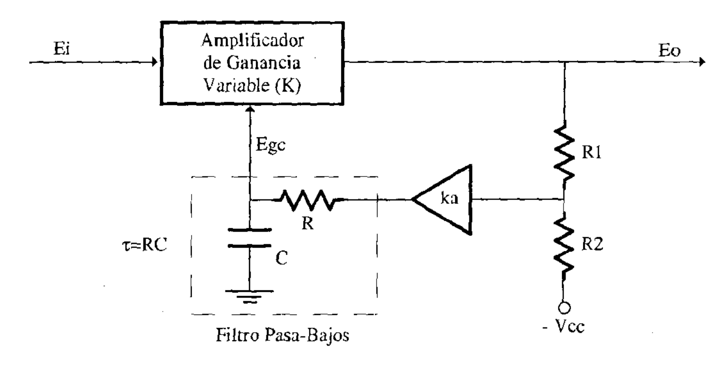


Fig. 2.29 Diagrama de un control automático de ganancia (CAG)

donde:

Ei ≡ Amplitud de la señal de entrada (Volts).

Eo ≡ Amplitud de la señal de salida (Volts).

Egc ≡ Tensión de control de la ganancia variable (Volts).

La amplitud de la señal de entrada Ei se multiplica por la ganancia variable K (que es función de la tensión de control de ganancia Egc) para obtener la amplitud de la señal de salida Eo (Eo=Ei·K).

La figura 2.30 muestra el diagrama de bloques resultante del CAG:

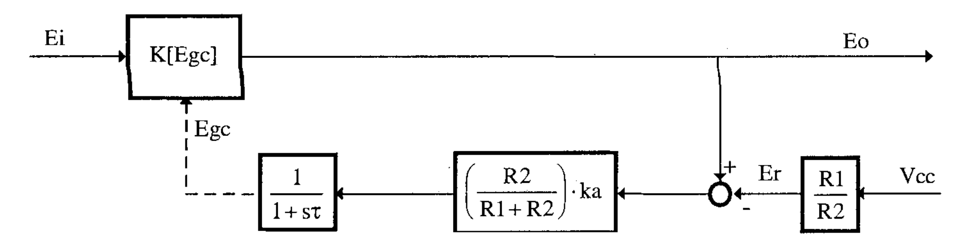


Fig. 2.30 Diagrama de bloques de un CAG.

donde: $K[Egc] = d \cdot e^{-b \cdot Egc}$

Este sistema es altamente no lineal (debido a la ganancia variable), pero puede linealizarse utilizando un modelo incremental para obtener el diagrama de bloques lineal de la figura 2.31.

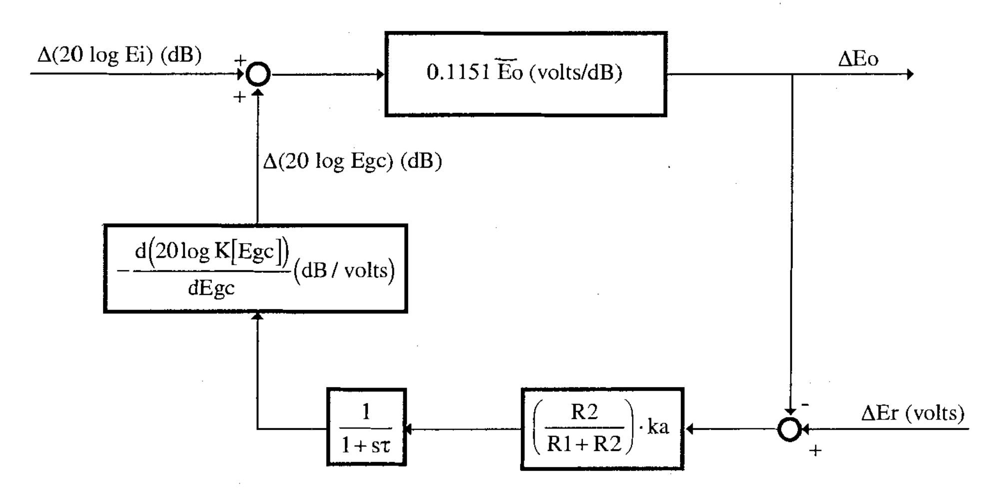


Fig. 2.31 Modelo incremental de un CAG.

Donde, en este caso, $\overline{Eo}$ es el valor deseado de la amplitud de la señal de salida $(Eo = \overline{Eo} \pm \Delta Eo)$.

Obtener:

1.- La función de transferencia en lazo abierto.

2.- La frecuencia de transición del sistema. (Corte por 0 dB del módulo de la función en lazo abierto).

3.- Las funciones de transferencia:

- $\dfrac{\Delta Eo}{\Delta(20 \log Ei)}$ cuando ΔEr=0

- $\dfrac{\Delta Eo}{\Delta Er}$ cuando $\Delta(20\log Ei)=0$

Determinar el valor de ΔEo en estado estacionario, en ambos casos, cuando las entradas son tipo escalón.

4.- Considerando los valores de los parámetros siguientes: b=1, R2=R1, C=100nF, y que la fuente de alimentación está perfectamente regulada, determinar los valores de la ganancia del amplificador **ka** y la resistencia del filtro pasa-bajos **R** si se desea una amplitud de salida Eo=5 V ± 5 mV cuando la entrada Ei varía de forma tipo escalón entre 1 mV y 1 Volt y la constante de tiempo del sistema en lazo cerrado debe ser de 40 ns.

5.- Describir brevemente el funcionamiento de este sistema. ¿En qué aplicaciones puede utilizarse?. Razonar la respuesta.

Solución:

1.- Recordando que no es posible obtener una caracterización dinámica de un sistema no lineal a través de una función de transferencia, se ha obtenido una descripción lineal del sistema mediante el modelo incremental del mismo. La función de transferencia en lazo abierto es única y es el resultado del producto de todas las funciones de transferencia del lazo del sistema.

Definiendo: $$k_o = \frac{0.1151\cdot k_a}{1+\dfrac{R1}{R2}}\cdot\left(-\frac{d(20\log K)}{dEgc}\right)\cdot\overline{E}_o$$

dado que:

$$-\frac{d(20\log K)}{dEgc} = -\frac{d(20\log(d\cdot e^{-b\cdot Egc}))}{dEgc} = -\frac{d}{dEgc}\left[20\log d - b\cdot Egc\cdot 20\log e\right] = b\cdot 20\log e$$

En conclusión: $$k_o = \frac{0.1151\cdot k_a}{1+\dfrac{R1}{R2}}\cdot\overline{E}_o\cdot b\cdot 20\log e$$

Función de transferencia en lazo abierto: $$G_{LA}(s) = \frac{k_o}{1+\tau\cdot s}$$

2.- Dado que el sistema es de primer orden, la frecuencia de transición es: $\omega_t = \dfrac{k_o}{\tau}$

3.- El modelo incremental es lineal, como hemos mencionado anteriormente, y por ello permite aplicar superposición para obtener la expresión de la señal de salida en función de las señales de entrada.

Funciones de transferencia:

- $\dfrac{\Delta Eo}{\Delta(20\log Ei)}$ cuando ΔEr=0

$$\frac{\Delta Eo}{\Delta(20\log Ei)}=\frac{0.1151\cdot \overline{E}o}{1+\dfrac{ko}{1+\tau\cdot s}}=\frac{0.1151\cdot \overline{E}o\cdot(1+\tau\cdot s)}{ko+1+\tau\cdot s}$$

Valor estacionario ante entrada tipo escalón:

$$\lim_{s\to 0}\frac{\Delta Eo}{\Delta(20\log Ei)}=\frac{0.1151\cdot \overline{E}o}{ko+1}\Rightarrow \Delta Eoss=\frac{0.1151\cdot \overline{E}o}{ko+1}\cdot\Delta(20\log Ei)$$

Debe observarse que: $ko\uparrow\Rightarrow \Delta Eoss\to 0$, es decir, que para una ganancia elevada, si la fuente de referencia no fluctúa (ΔEr=0), no existirán variaciones de amplitud en la señal de salida.

- $\dfrac{\Delta Eo}{\Delta Er}$ cuando Δ(20logEi)=0

$$\frac{\Delta Eo}{\Delta Er}=\frac{\dfrac{ko}{1+\tau\cdot s}}{1+\dfrac{ko}{1+\tau\cdot s}}=\frac{ko}{ko+1+\tau\cdot s}$$

Valor estacionario ante entrada tipo escalón:

$$\lim_{s\to 0}\frac{\Delta Eo}{\Delta Er}=\frac{ko}{ko+1}\Rightarrow \Delta Eoss=\frac{ko}{ko+1}\cdot\Delta Erss$$

Debe observarse que: $ko\uparrow\Rightarrow \Delta Eoss\to\Delta Erss$, es decir, que para una ganancia elevada, si no existen variaciones en la amplitud de la señal de entrada (Δ(20logEi)=0), podemos reducir las variaciones de amplitud de salida únicamente a la variación debida a la fuente de referencia (ΔEr_{ss}).

4.- Diseño:

- Valores de los parámetros: b=1, R2=R1 y C=100nF.
- La fuente de alimentación está perfectamente regulada, lo cual implica que ΔEr=0
- Amplitud de salida Eo=5 V ± 5 mV, lo cual implica $\overline{E}o=5V$, $\Delta Eo=5mV$.
- Ei varía de forma tipo escalón entre 1 mV y 1 Volt, lo cual implica ΔEi=1000.
- La constante de tiempo del sistema en Lazo Cerrado debe ser de 40 ns.

$$\Delta Ei = 1000 \quad \Rightarrow \quad 20\log \Delta Ei = 60 \text{ dB} \qquad\qquad \Delta E_{oss} = \frac{0.1151 \cdot \overline{E_o}}{k_o + 1} \cdot \Delta(20\log Ei)$$

$$5 \cdot 10^{-3} = \frac{0.1151 \cdot 5}{k_o + 1} \cdot 60 \quad \Rightarrow \quad k_o = 6.905 \cdot 10^{3}$$

$$k_o = \frac{0.1151 \cdot k_a}{1 + \frac{R1}{R2}} \cdot \overline{E_o} \cdot b \cdot 20\log e \quad \Rightarrow \quad k_a = 2762.7$$

Constante de tiempo del sistema en Lazo Cerrado:

$$\tau_{LC} = \frac{\tau}{k_o + 1} = 40\text{nseg} = 4 \cdot 10^{-8} \quad \Rightarrow \quad \tau = 2.7624 \cdot 10^{-4}$$

$$\tau = R \cdot C \quad \Rightarrow \quad R = 2762.4\Omega$$

5.- En conclusión, se puede deducir que este sistema es válido para obtener señales de salida dentro de un determinado margen de valores dependientes de la buena regulación de la fuente de alimentación; evitando el riesgo de variaciones provenientes de la señal de entrada. La ganancia del sistema se autoregula para lograr mantener el valor final de salida aproximadamente constante, de este modo este sistema es útil para aquellas aplicaciones en las cuales la señal de entrada sea muy variable o de amplitud poco predecible.

2.6 El lugar geométrico de las raíces (L.G.R.).

Debido a la necesidad de conocer los polos de un sistema en lazo cerrado, ya que determinarán las características básicas de la respuesta transitoria, se desarrolla el método del lugar geométrico de las Raíces (también denominado Lugar de Evans). Este método permite ubicar en un gráfico los polos de un sistema en lazo cerrado a partir del conocimiento de los polos en lazo abierto, en función de un parámetro variable. Para ello considérese la ecuación característica de un sistema en lazo cerrado:

$$1 + Gc(s)G(s)H(s) = 0 \Rightarrow 1 + G_{LA}(s) = 0 \Rightarrow G_{LA}(s) = -1.$$

La resolución de esta ecuación implica la verificación de dos condiciones:

- Condición de ángulo: $\text{fase}\{G_{LA}(s)\} = \pm\, 180^{\circ}(2\lambda + 1); \quad \lambda \in N$ (2.16)

- Condición de módulo: $|G_{LA}(s)| = 1$ (2.17)

Debe observarse que, de este modo, se pasa del estudio del sistema en lazo cerrado al estudio de características del sistema en lazo abierto, lo cual debe permitir mayor facilidad en el cálculo.

Se define el lugar geométrico de las raíces como el conjunto de puntos del plano S en los que se verifica la condición de ángulo.

En conclusión, un punto que pertenece al lugar geométrico de las raíces es un posible polo del sistema en lazo cerrado; para ello únicamente es necesario validar la condición de módulo, y ésta se cumplirá para un valor determinado de la ganancia del sistema en lazo abierto. Sin embargo, un punto del plano S que no pertenezca al LGR no puede ser polo en lazo cerrado porque no verifica la condición de ángulo, aunque varíe la ganancia del sistema en lazo abierto. De este modo, variando el parámetro k, donde: $G_{LA}(s) = k \cdot \frac{(s+z_1).....(s+z_m)}{(s+p_1).....(s+p_n)}$; $0 \leq k < \infty$, se logra trazar el lugar geométrico de las raíces que proporciona los valores de los polos en lazo cerrado en función de k.

2.6.1 Reglas de construcción del LGR.

Dado que los polos y ceros complejos de la función de transferencia en lazo abierto tienen asociados sus complejo-conjugados, el LGR será simétrico respecto al eje real.

1) Trazar el diagrama polos-ceros en lazo abierto.

Ecuación característica:

$$1 + G_{LA}(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{b_0 \cdot s^m + b_1 \cdot s^{m-1} + ... + b_m}{a_0 \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + ... + a_n} = 0 \Rightarrow 1 + k \cdot \frac{(s+z_1).....(s+z_m)}{(s+p_1).....(s+p_n)} = 0$$

donde: $s=-z_i$ son ceros y $s=-p_i$ son polos en lazo abierto

2) Puntos de inicio y final del LGR.

El trazado del lugar geométrico de las raíces se inicia en los polos en lazo abierto y finaliza en los ceros en lazo abierto (en este caso, deben considerarse los ceros infinitos). Puede demostrarse esta sentencia resolviendo:

- Inicio en polos en lazo abierto:

$$\frac{(s+z_1).....(s+z_m)}{(s+p_1).....(s+p_n)} = -\frac{1}{k} \Rightarrow \lim_{k \to 0}\left[\frac{(s+z_1).....(s+z_m)}{(s+p_1).....(s+p_n)}\right] = \lim_{k \to 0}\left[-\frac{1}{k}\right] = \infty$$

para que la expresión anterior sea cierta es necesario que $s \rightarrow -p_i$

En conclusión, los polos en lazo cerrado coinciden con los polos en lazo abierto cuando k=0. Debe indicarse que, lógicamente, este efecto es relevante únicamente a nivel analítico, dado que no es posible tener k=0 a nivel real.

- Final en ceros en lazo abierto:

$$\frac{(s+z_1).....(s+z_m)}{(s+p_1).....(s+p_n)} = -\frac{1}{k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left[\frac{(s+z_1).....(s+z_m)}{(s+p_1).....(s+p_n)}\right] = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{k}\right] = 0$$

Para que la expresión anterior sea cierta es necesario que $s \to -z_i$ ó $s \to \infty$ (en el caso para el cual el grado del denominador sea mayor que el grado del numerador).

En conclusión, los polos en lazo cerrado coinciden con los ceros en lazo abierto cuando k→∞. Así el lugar geométrico puede tener ramas que finalicen en infinito; ahora bien, dado que el sistema es causal nunca puede iniciarse el LGR en infinito.

El LGR se origina en los polos en lazo abierto y finaliza en los ceros en lazo abierto (finitos e infinitos). El número de ramas del lugar geométrico indica el número de polos en lazo cerrado y coincide con el número de polos en lazo abierto y el número de ceros en lazo abierto (finitos e infinitos).

3) Lugar geométrico de las raíces sobre el eje real.

Los polos y ceros complejo-conjugados no afectan en la evaluación del LGR sobre el eje real, dado que en su contribución suman múltiplos de 360°. Observando, únicamente, los polos y ceros en lazo abierto sobre el eje real, puede aplicarse la siguiente consideración: un punto del eje real pertenece al LGR cuando el número de total de polos y ceros a su derecha es impar (la suma angular total será un múltiplo de 180°).

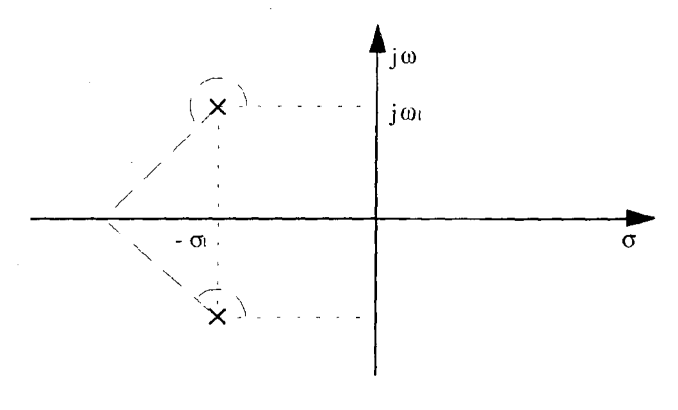


Fig. 2.32 Contribución angular de polos complejos-conjugados sobre un punto del eje real

4) Asíntotas del LGR.

El estudio asintótico se realiza para $|s| \to \infty$. En ese caso, las contribuciones angulares por parte de todas las raíces son prácticamente iguales, y existe un efecto de cancelación de contribución angular entre polos y ceros. De este modo, la expresión de los ángulos de las asíntotas vendrá dada por:

$$\angle \text{Asíntota} = \frac{\pm 180^{o} \cdot (2\lambda + 1)}{n - m} \tag{2.18}$$

donde: n y m son los grados de denominador y numerador de la función de transferencia en lazo abierto, respectivamente, y λ es un número natural.

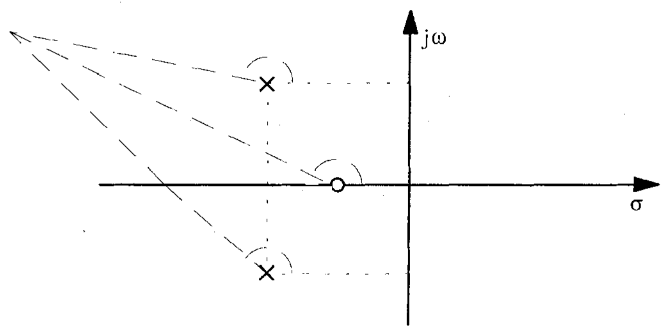


Fig. 2.33 Contribución angular sobre una asíntota

Para demostrar esta expresión debe considerarse la ecuación característica:

$$Gc(s)G(s)H(s) = -1 \Rightarrow G_{LA}(s) = -1$$

$$k \cdot \frac{(s + z_1).....(s + z_m)}{(s + p_1).....(s + p_n)} = -1; \quad k \cdot \lim_{s \to \infty} \left[\frac{(s + z_1).....(s + z_m)}{(s + p_1).....(s + p_n)} \right] \to \frac{k}{s^{n-m}}$$

$$\text{Recordando la condición de ángulo: } \text{fase}\left\{\frac{k}{s^{n-m}}\right\} = \pm 180^{o}(2\lambda + 1); \quad \lambda \in N$$

$$\text{fase}\{s\} = \frac{\pm 180^{o}(2\lambda + 1)}{n - m}; \quad \lambda \in N$$

$$\text{Así, si por ejemplo: n-m=3; } \text{fase}\{s\} = \frac{\pm 180^{o}(2\lambda + 1)}{3} = \begin{cases} \pm 60^{o} & \lambda = 0 \\ \pm 180^{o} & \lambda = 1 \\ \pm 300^{o} = \pm 60^{o} & \lambda = 2 \end{cases}$$

El punto de intersección de las asíntotas con el eje real, necesario para poder realizar el trazado de las asíntotas, viene dado por la expresión :

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n - m} \qquad (2.19)$$

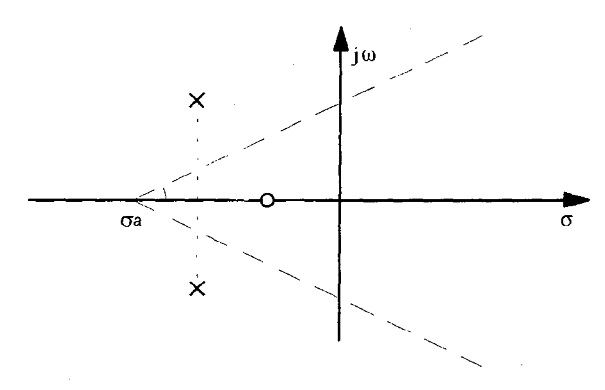


Fig. 2.34 Ubicación de las asíntotas

Debe observarse que en el caso de n-m=1, esto es, poseer únicamente una asíntota, no debe calcularse el punto de intersección, dado que todo el eje real constituye la propia asíntota.

5) Puntos de ruptura.

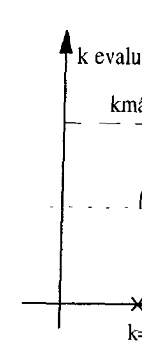
Por definición, un punto de ruptura en el LGR corresponde a una raíz múltiple de la ecuación característica, esto es, un punto de ruptura implica un polo en lazo cerrado múltiple. Debe resaltarse que los puntos de ruptura pueden ser reales o complejo conjugados. Los puntos de ruptura pueden dividirse en puntos de ruptura de dispersión (en los cuales el valor de k alcanza un máximo relativo) y puntos de ruptura de confluencia (para los cuales k alcanza un mínimo relativo).

Para determinar el procedimiento de cálculo de puntos de ruptura, se realiza la evaluación de k cuando aparece un punto de ruptura sobre el eje real, diferenciándose los casos:

1. LGR sobre eje real entre dos polos. En este caso, el punto de ruptura aparece cuando k alcanza un máximo relativo, determinándose según la expresión:

$$1 + G_{LA}(s) = \bar{0} \Rightarrow 1 + k \cdot \frac{(s+z_1).....(s+z_m)}{(s+p_1).....(s+p_n)} = 0 \Rightarrow 1 + k \cdot \frac{A(s)}{B(s)} = 0 \Rightarrow k = -\frac{B(s)}{A(s)}$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow B'(s) \cdot A(s) - A'(s) \cdot B(s) = 0$$



Las soluciones de la ecuación anterior son puntos de ruptura si pertenecen al LGR y la k asociada es real y positiva. Obviamente, las soluciones de la ecuación anterior pueden proporcionar puntos de ruptura complejo conjugados.

2. LGR sobre eje real entre dos ceros. En este caso, el punto de ruptura aparece cuando k alcanza un mínimo relativo, determinándose análogamente al caso anterior.

3. LGR sobre eje real entre cero y polo. En este caso, existe la posibilidad de que no aparezcan puntos de ruptura, o bien, que existan en pares de dispersión y confluencia.

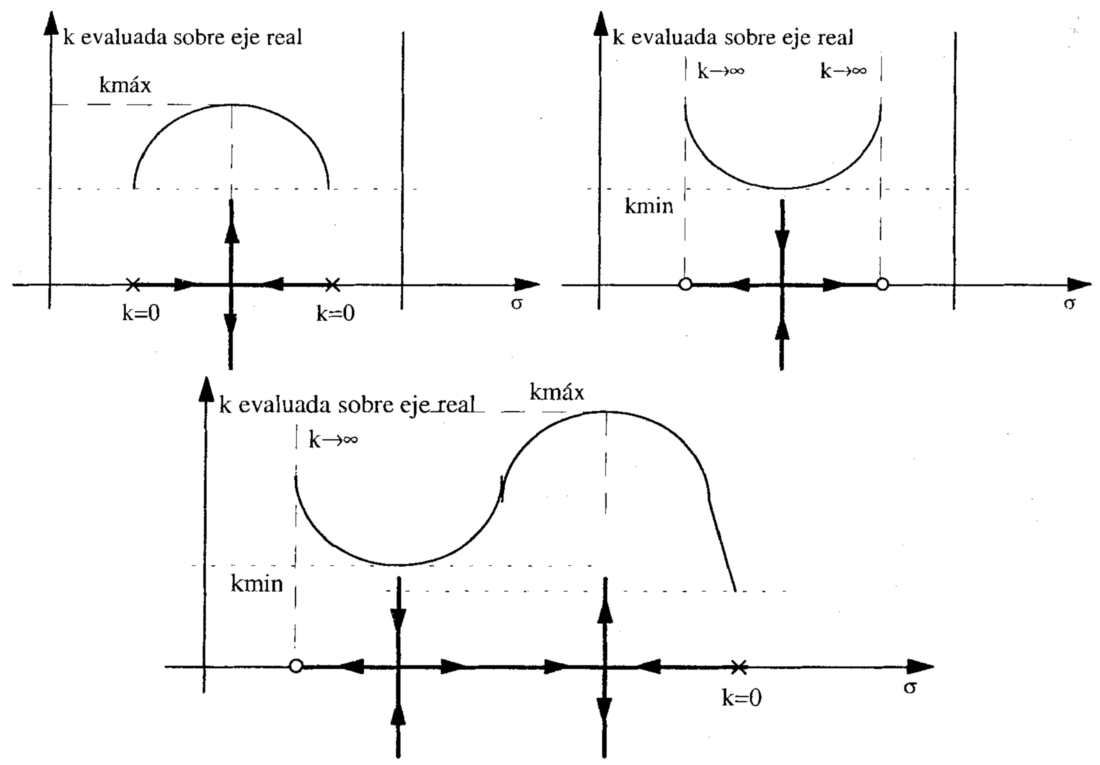


Fig. 2.35 Análisis de puntos de ruptura sobre el eje real

6) Puntos de cruce del LGR con el eje imaginario.

Métodos:

1- Sustituir s=jω en la ecuación característica, igualando parte real e imaginaria a cero.

$$1 + G(s)H(s) = 0 \Rightarrow 1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\omega) + j\mathrm{Im}(\omega) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(\omega) = 0 \\ \mathrm{Im}(\omega) = 0 \end{cases}$$

2- Aplicando el algoritmo de Routh, anulando una fila de coeficientes.

Por ejemplo: $s^3 + b \cdot s^2 + c \cdot s + k \cdot d = 0$

$$\text{Algoritmo: } \left\langle \begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & c \\ s^2 & b & k \cdot d \\ s^1 & \dfrac{b \cdot c - k \cdot d}{b} & \\ s^0 & k \cdot d & \end{array} \right\rangle \text{, anular filas} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b \cdot c - k \cdot d}{b} = 0 \Rightarrow k = \dfrac{b.c}{d} \\ k = 0 \end{cases}$$

Polinomio auxiliar: $Pa(s) = b \cdot s^2 + k \cdot d = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{c}$

7) Angulos de arranque y llegada.

Los ángulos de arranque del LGR de los polos en lazo abierto y los ángulos de llegada del LGR a los ceros en lazo abierto se determinan a partir de la distribución del diagrama polos-ceros en lazo abierto. Para ello, se presupone un punto perteneciente al LGR suficientemente cercano a la singularidad sobre la que se quiere determinar el ángulo de partida o llegada como para poder considerarlo en la misma posición que la propia singularidad; de este modo, al aplicar la condición de ángulo todas las contribuciones angulares serán conocidas exceptuando el ángulo de arranque o llegada incógnita.

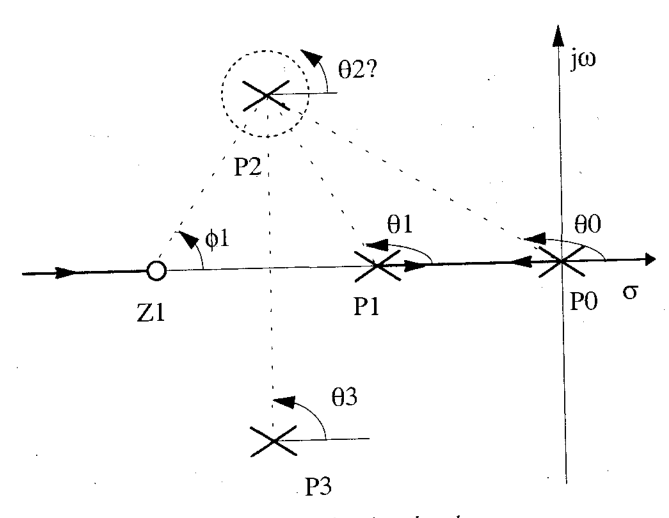


Fig. 2.36 Análisis de los ángulos de arranque

Ejemplo 2.10

Calcular el LGR de un sistema con $G_{LA}(s) = \dfrac{k \cdot (s - 2/3)}{s^2 \cdot (s^2 + 10/3 \cdot s + 7)}$

1) Polos y ceros en lazo abierto.

Ceros: $\begin{cases} z_1 = 2/3 \\ z_2 = \infty \text{ triple} \end{cases}$ Polos: $\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_{2,3} = -5/3 \pm j2.06 \end{cases}$

2) LGR en el eje real

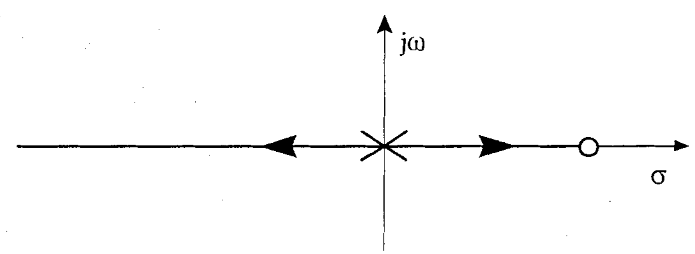


Fig. 2.37 LGR sobre el eje real

3) Asíntotas

n= 4 (nº de polos finitos) y m=1(nº de ceros finitos)

$$\text{fase}\{s\} = \frac{\pm 180^o(2\lambda + 1)}{3} = \begin{cases} \pm 60^o & \lambda = 0 \\ \pm 180^o & \lambda = 1 \\ \pm 300^o = \pm 60^o & \lambda = 2 \end{cases}$$

4) Intersección de las asíntotas con el eje real.

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} pi - \sum_{j=1}^{m} zj}{n - m} = \frac{\left(0 + 0 - 5/3 + j2.06 - 5/3 - j2.06\right) - 2/3}{4 - 1} = -1.33$$

5) Puntos de ruptura.

Al no existir ninguna rama entre polo y cero, no se cumple la condición necesaria para que exista puntos de ruptura. Por tanto sólo se calcularan al final si las condiciones geométricas lo requieren.

6) Angulos de arranque y llegada

A continuación se calcula el ángulo de arranque de las ramas de los polos complejo conjugados. Para ello, en el polo $-\frac{5}{3}+j2.06$ se toma un punto *P* de su entorno tal que $P \in LGR$.

$$\text{fase}\{P\} = \theta_1 - [2\cdot\phi_1 + \phi_2 + \phi_3] = \pm 180(2\cdot\lambda + 1)$$

Calculo de ϕ_1

$$180° - \phi_1 = \text{arctg}\frac{2.06}{1.67} \Rightarrow \phi_1 = 129°$$

Calculo de θ_1

$$180° - \theta_1 = \text{arctg}\frac{2.06}{2.2} \Rightarrow \theta_1 = 136.8°$$

$\phi_3 = 90°$

Calculo de ϕ_2

$$\pm 180°(2\cdot\lambda + 1) = 136.8° - [2\cdot 129° + \phi_2 + 90°] \Rightarrow \phi_2 = -31.2°$$

7) Puntos de cruce con el eje $j\omega$.

Para encontrar el punto de cruce del LGR con el eje $j\omega$ se utiliza el criterio de estabilidad de Routh.

Se busca la ecuación característica:

$$s^4 + \frac{10}{3}s^3 + 7s^2 + ks - \frac{2}{3}k = 0$$

Se aplica el algoritmo de Routh.

s^4	1	7	$-\frac{2}{3}k$
s^3	$\frac{10}{3}$	k	
s^2	$7-\frac{3k}{10}$	$-\frac{2}{3}k$	
s^1	$\dfrac{-\frac{3k^2}{10}+\frac{83}{9}k}{7-\frac{3k}{10}}$		
s^0	$-\frac{2}{3}k$		

A continuación se busca una k que anule alguna fila.

- k=0 anula la fila s^0. Pero esto indica que hay un polo en el origen que ya era conocido.
- Se busca el valor de k que anula la fila s^1

$$-\frac{3k^2}{10}+\frac{83}{9}k=0 \Rightarrow k=30.7$$

A continuación se busca las raíces del polinomio auxiliar a esta fila.

$$\left(7-\frac{3k}{10}\right)s^2-\frac{2}{3}k\Bigg|_{k=30.7}=0$$

$$-2.21s^2-20.46=0 \Rightarrow s_{1,2}=\pm j3.04$$

El LGR cortará al eje jω por ±j3.04.

- Para la fila s^2 no hay un único valor de k que anule a la fila, por tanto no habrá otros posibles puntos de corte.



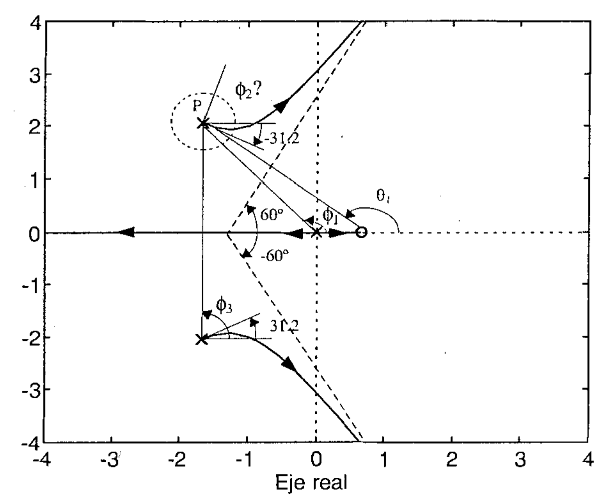


Fig. 2.38 Lugar geométrico de las raíces.

Ejemplo 2.11

Calcular el LGR de un sistema con $G_{LA}(s)=\dfrac{k\cdot(s+2)}{(s+1)^2}$

1) Polos y ceros en lazo abierto.

Ceros: $\begin{cases} z_1 = -2 \\ z_2 = \infty \text{ doble} \end{cases}$ polos: $\{-1$ doble

2) LGR en el eje real

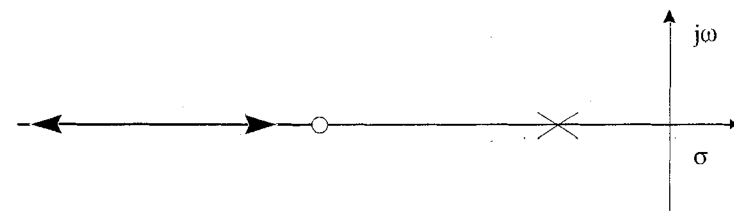


Fig. 2.39 LGR sobre el eje real

3) Asíntotas

n= 2 (nº de polos finitos) y m=1(nº de ceros finitos)

$$\text{fase}\{s\} = \frac{\pm 180°(2\lambda+1)}{1} = \begin{cases} \pm 180° & \lambda = 0 \\ \pm 540 = \pm 180° & \lambda = 1 \end{cases}$$

La única asíntota es el eje real negativo.

4) Intersección de las asíntotas con el eje real.

Serán todo los puntos del semieje real negativo.

5) Puntos de ruptura.

Existe una rama entre dos ceros, por tanto existirá como mínimo un punto de ruptura.

De la ecuación característica:

$$k = \frac{-(s+1)^2}{(s+2)}$$

$$\frac{dk}{ds} = -\frac{2(s+1)(s+2)-(s+1)^2}{(s+2)^2} = 0$$

$$s^2 + 4s + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_{r1} = -1 \\ s_{r2} = -3 \end{cases}$$

Los dos puntos pertenecen al LGR y poseen $k(s_{r1}) = 0$ y $k(s_{r2}) = 4$ mayores o iguales a cero y por tanto son puntos de ruptura.

6) Ángulos de

Ángulo de llega

Ángulo de arran

7) Puntos de cr

Para encontrar e

Se busca la ecua

Se aplica el algo

A continuación s

- $k = -\frac{1}{2}$ anul

- k = −2 anula

Se comprueba qu

6) Ángulos de arranque y llegada.

Ángulo de llegada a los ceros: ±180°

Ángulo de arranque de los polos:

$$\theta_1 - 2\phi_1 = \pm 180° \Rightarrow \phi_1 = \pm 90°$$

$$\theta_1 = 0°$$

7) Puntos de cruce con el eje jω.

Para encontrar el punto de cruce del LGR con el eje jω se utiliza el criterio de estabilidad de Routh.

Se busca la ecuación característica:

$$s^2 + (k+2)s + 2k + 1 = 0$$

Se aplica el algoritmo de Routh:

$$\left\langle \begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 2k+1 \\ s^1 & k+2 & \\ s^0 & 2k+1 & \end{array} \right\rangle$$

A continuación se busca una k que anule alguna fila.

- $k = -\frac{1}{2}$ anula la fila s^0. Pero esto no es posible.
- $k = -2$ anula la fila s^1. Pero esto no es posible.

Se comprueba que no corta con el eje jω.



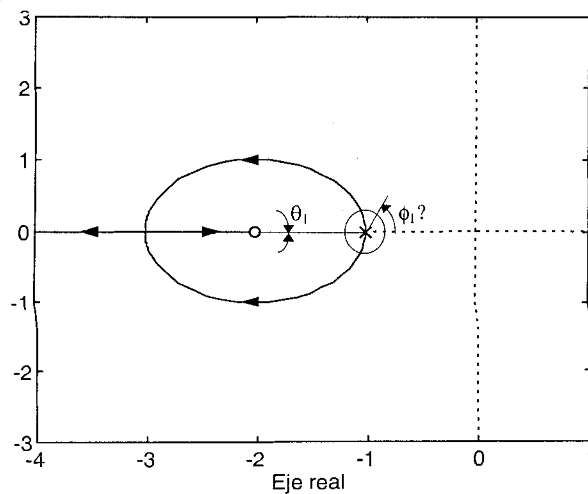
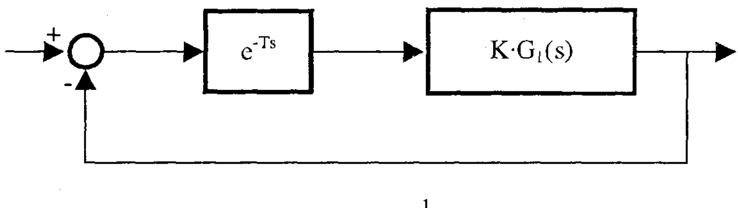


Fig. 2.40 Lugar geométrico de las raíces

Ejemplo 2.12

Considérese el siguiente sistema correspondiente a un intercambiador de calor descrito por la función de transferencia $G_1(s)$



$$G_1(s) = \frac{1}{s}$$

Fig. 2.41 Diagrama de bloques de un intercambiador de calor.

El término e^{-Ts} es el retardo provocado por el sensor de temperatura que está físicamente un poco más abajo del intercambiador, de modo que su lectura se retarda T seg.

Se desea construir el lugar geométrico de las raíces para un valor fijo de T. Para ello:

1.- Escribir la ecuación característica del sistema.

2.- Encontrar las condiciones de ángulo y módulo.

3.- La ecuación característica del sistema tiene un número infinito de raíces por ser una ecuación transcendental. Determinar el número de ramas del lugar geométrico de raíces.

4.- Demostrar que la ecuación que determina los puntos donde el LGR cruza al eje imaginario en frecuencias positivas es:

$$\omega = \frac{1}{T}\left[\frac{\pi}{2} + \lambda \cdot 2\pi\right], \quad \text{y calcular dichos puntos para } \lambda=0,1,2.$$

Recordar que el LGR es simétrico respecto al eje real del plano s.

5.- Demostrar que los puntos del LGR para K=0 están en los polos de $G_1(s)$ y/o $\sigma = -\infty$. ($s=\sigma+j\omega$).

Dibujar el LGR sobre el eje real, indicando las direcciones de las ramas y la posición de los polos en lazo cerrado en K=0.

6.- Demostrar que los puntos del LGR para $K=\infty$ están en los ceros de $G_1(s)$ y/o $\sigma=\infty$ ($s = \sigma+j\omega$).

Las asíntotas del LGR son infinitas en número y todas ellas paralelas al eje real en el plano S.

7.- Demostrar que los puntos de cruce de las asíntotas con el eje imaginario positivo vienen dados por las expresiones:

- Asíntotas para $\sigma=-\infty$: $\quad \omega = \dfrac{2\pi\lambda}{T}$

- Asíntotas para $\sigma=\infty$: $\omega = \frac{1}{T}[\pi + 2\pi\lambda]$

Calcular las asíntotas para $\lambda=0,1,2$.

Considerar: $\text{Fase}[G_1(s)]=-180^\circ|_{s=-\infty+j\omega}$

$\text{Fase}[G_1(s)]=0^\circ|_{s=\infty+j\omega}$

8.- Los puntos de ruptura del LGR deben satisfacer $\frac{d\left[G_1(s)K\,e^{-Ts}\right]}{ds} = 0$. Calcular los puntos de ruptura.

9.- Dibujar el Lugar Geométrico de Raíces completo.

Solución:

1.- $$1 + KG_1(s)e^{-Ts} = 0\,; \quad 1 + \frac{K}{s}e^{-Ts} = 0$$

2.- $$s=\sigma + j\omega$$

$$1 + Ke^{-T\sigma}e^{-j\omega T}G_1(s) = 0$$
$$Ke^{-T\sigma}e^{-j\omega T}G_1(s) = -1$$

Condición de módulo: $Ke^{-T\sigma}|G_1(s)| = 1$

Condición de ángulo: $-\omega T + \text{fase}\{G_1(s)\} = \pm 180(2\lambda + 1)$

$$\text{fase}\{G_1(s)\} = \pm 180(2\lambda + 1) + \omega T$$

3.- Si la ecuación característica tiene infinitas raíces, habrá infinitos polos en lazo cerrado, y para cada polo en lazo cerrado habrá una rama. Por tanto habrá infinitas ramas.

4.- Los puntos donde el LGR cruza al eje imaginario tiene que cumplir la condición de ángulo.

Por tanto aplicando la condición de ángulo a los puntos $s=j\omega$ podremos encontrar ω.

$$\text{fase}\{G_1(s)\}\big|_{s=j\omega} = -90 \qquad -90 = \pm 180(2\lambda + 1) + \omega T \qquad \omega = \frac{1}{T}[-90 \mp 180(2\lambda + 1)]$$

$$\omega = \frac{1}{T}[-90 + 180(2\lambda + 1)] = \frac{1}{T}\left[\frac{\pi}{2} + \lambda 2\pi\right]$$

Descartamos la solución $\omega = \frac{1}{T}\left[-90 - 180(2\lambda + 1)\right] = -\frac{1}{T}\left[\frac{3\pi}{2} + \lambda 2\pi\right]$, porque hemos aplicado la condición de ángulo a frecuencias positivas.

Por tanto con $\omega = \frac{1}{T}\left[\frac{\pi}{2} + \lambda 2\pi\right]$

$\lambda=0 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2T}$ $\qquad$ $\lambda=1 \Rightarrow \omega = \frac{5\pi}{2T}$ $\qquad$ $\lambda=2 \Rightarrow \omega = \frac{9\pi}{2T}$

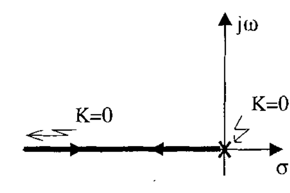
5.- Aplicamos la condición de módulo.

$$e^{-T\sigma}\left|G_1(s)\right| = \frac{1}{K}$$

Si $K \to 0 \Rightarrow e^{-T\sigma}\left|G_1(s)\right| = \infty$

Por tanto s tiende a los polos de $G_1(s)$ ó σ tiende a $-\infty$.

Para el eje real el LGR es:



6.- Aplicamos condición de módulo:

$$e^{-T\sigma}\left|G_1(s)\right| = \frac{1}{K}$$

Si $K \to \infty \Rightarrow e^{-T\sigma}\left|G_1(s)\right| = 0$

Por tanto, s tiende a los ceros de $G_1(s)$ ó σ tiende a ∞.

7.- Los puntos de $s=-\infty+j\omega$ deben pertenecer al LGR y por tanto cumplir la condición de ángulo.

- Puntos $\sigma \to -\infty$

$$\text{fase}\{G_1(s)\} = \pm 180(2\lambda + 1) + \omega T\,;\quad -180 = \pm 180(2\lambda + 1) + \omega T$$

Para: $-180 = -180(2\lambda + 1) + \omega T$

$$\omega = \frac{1}{T}\left[360\lambda\right] = \frac{2\pi\lambda}{T}$$

Para: $-180 = +180(2\lambda + 1) + \omega T$

$$\omega = -\frac{1}{T}[360 + 360\lambda] = -\frac{2\pi(1+\lambda)}{T}$$

Como calculamos sobre el eje positivo, descartamos frecuencias negativas.

Tendremos asíntotas para $\sigma \to -\infty$ en $\omega = \frac{2\pi\lambda}{T}$

$\lambda=0 \Rightarrow \omega = 0$ $\lambda=1 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$ $\lambda=2 \Rightarrow \omega = \frac{4\pi}{T}$

- Puntos $\sigma \to \infty$

$$\text{fase}\{G_1(s)\} = \pm 180(2\lambda + 1) + \omega T$$

$$0 = \pm 180(2\lambda + 1) + \omega T$$

Para: $0 = -180(2\lambda + 1) + \omega T$

$$\omega = \frac{1}{T}[180(2\lambda + 1)] = \frac{1}{T}[\pi + 2\pi\lambda]$$

Para: $0 = +180(2\lambda + 1) + \omega T$

$$\omega = -\frac{1}{T}[180(2\lambda + 1)] = -\frac{1}{T}[\pi + 2\pi\lambda]$$

Como calculamos sobre el eje positivo, descartamos frecuencias negativas.

Tendremos asíntotas para $\sigma \to -\infty$ en $\omega = -\frac{1}{T}[\pi + 2\pi\lambda]$

$\lambda=0 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{T}$ $\lambda=1 \Rightarrow \omega = \frac{3\pi}{T}$ $\lambda=2 \Rightarrow \omega = \frac{5\pi}{T}$

8.- $\frac{d}{ds}\frac{Ke^{-Ts}}{s} = 0$ $e^{-Ts}(Ts + 1) = 0$ $s = -\frac{1}{T}$

9.-

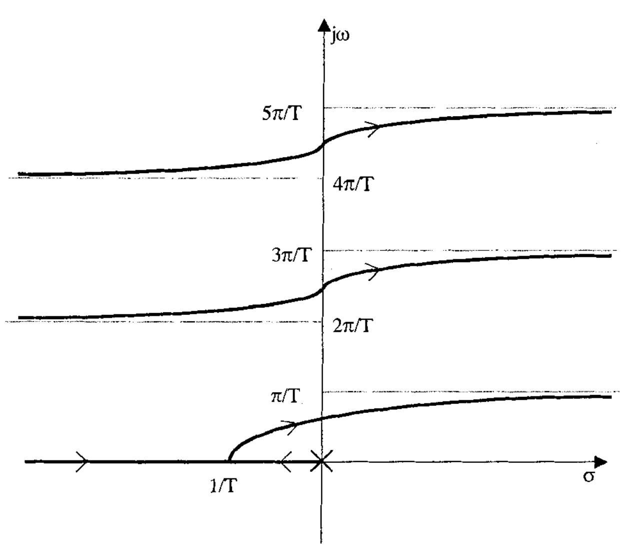


Fig. 2.42 Diagrama del lugar geométrico de raíces.

2.6.2 Evaluación de Ceros en lazo cerrado.

La determinación de los ceros en lazo cerrado debe realizarse cuidadosamente, dado que no aparecen de un modo directo en el LGR y su influencia es importante en la respuesta del sistema. Observando las topologías que se muestran en la figura 2.26, puede decirse que los ceros en lazo cerrado son los ceros en lazo directo conjuntamente con los polos del elemento de medida.

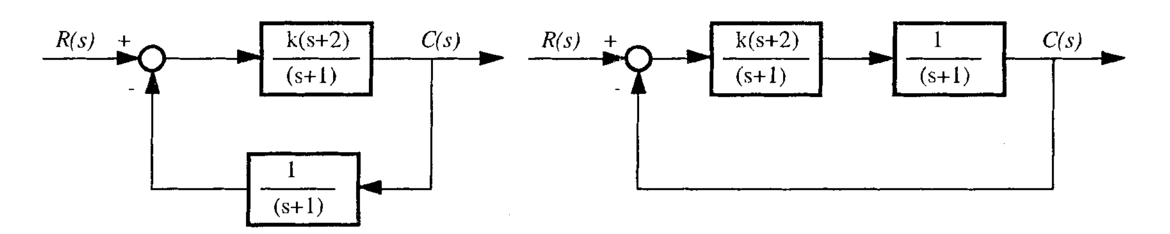


Fig. 2.43 Evaluación de los ceros en lazo cerrado

Las funciones de transferencia en lazo cerrado de los sistemas descritos son:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k \cdot (s+1) \cdot (s+2)}{(s+1)^2 + k \cdot (s+2)} \quad y \quad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k \cdot (s+2)}{(s+1)^2 + k \cdot (s+2)}$$

Los dos sistemas tienen la misma ecuación característica, lo cual implica que tienen los mismos polos en lazo cerrado para el mismo valor de k. El trazado del lugar geométrico de las raíces es el mismo, pero los ceros en lazo cerrado son diferentes debido al efecto de la función de transferencia del

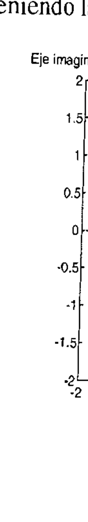
elemento de n
estructura con

Interesará min
ello, deberá a
cerrado. En c
menores que l
rápidamente la

2.6.3 Aspectos

1. Efectos de ac

La adición de u
del plano S ti
manteniendo la



La adición de un
del plano S tiene
sufre un efecto co

elemento de medida. De este modo, para conocer los ceros en lazo cerrado es necesario observar la estructura concreta del sistema.

Interesará minimizar el efecto del cero de lazo cerrado introducido por el elemento de medida; para ello, deberá alejarse substancialmente del eje imaginario del plano S respecto a los polos en lazo cerrado. En conclusión, los polos del elemento de medida deben tener constantes de tiempo mucho menores que las características de la planta, esto es, el elemento de medida debe "procesar" muy rápidamente la información respecto a la respuesta transitoria de la planta.

2.6.3 Aspectos importantes de construcción del LGR.

1. Efectos de adición de polos y ceros.

La adición de un polo a la función de transferencia en lazo abierto GLA(s) en el semiplano izquierdo del plano S tiene el efecto de "empujar" el LGR hacia el semiplano derecho. De este modo, manteniendo la ganancia del sistema, su dinámica tenderá a empeorar.

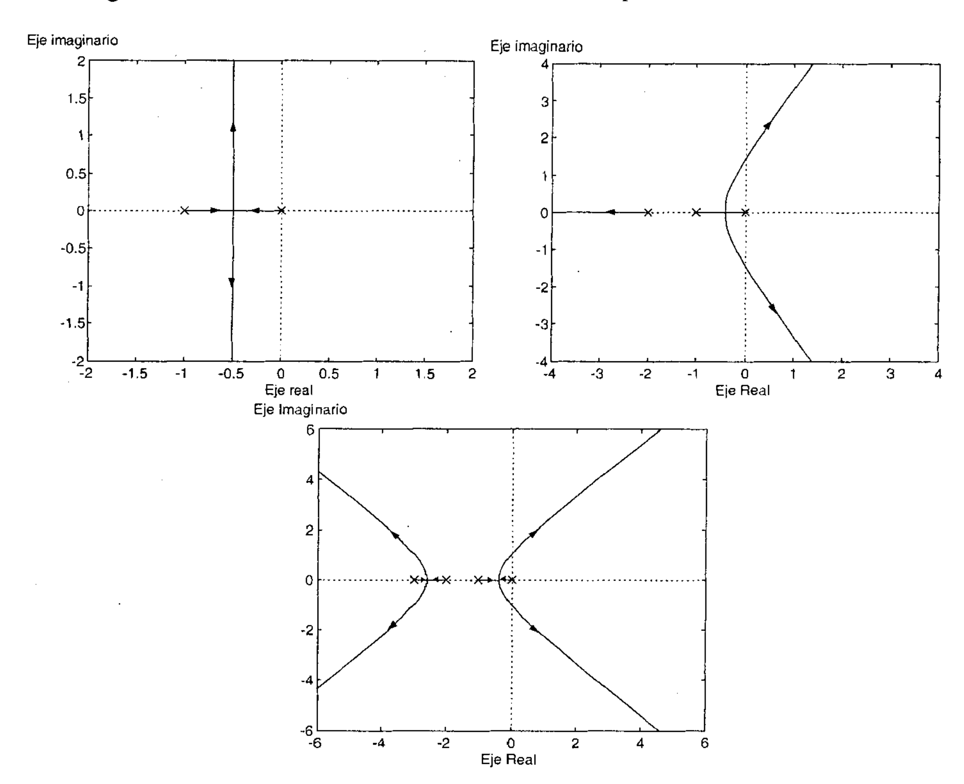


Fig. 2.44 Efecto sobre el LGR de la adición de polos

La adición de un cero a la función de transferencia en lazo abierto GLA(s) en el semiplano izquierdo del plano S tiene el efecto de "atraer" el LGR hacia el semiplano izquierdo. En este caso, la dinámica sufre un efecto contrario al anterior.

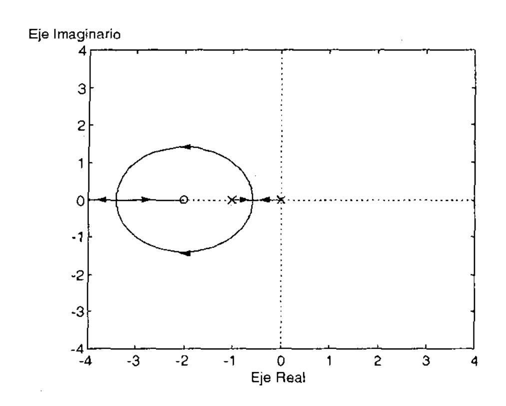


Fig. 2.45 Efecto sobre el LGR de la adición de un cero.

2. Efectos de movimientos de polos y ceros.

A medida que un polo en lazo abierto se acerca al eje imaginario, las ramas del LGR se acercan más al semiplano derecho. Observaríamos el efecto contrario en el caso del movimiento de un cero en lazo abierto.

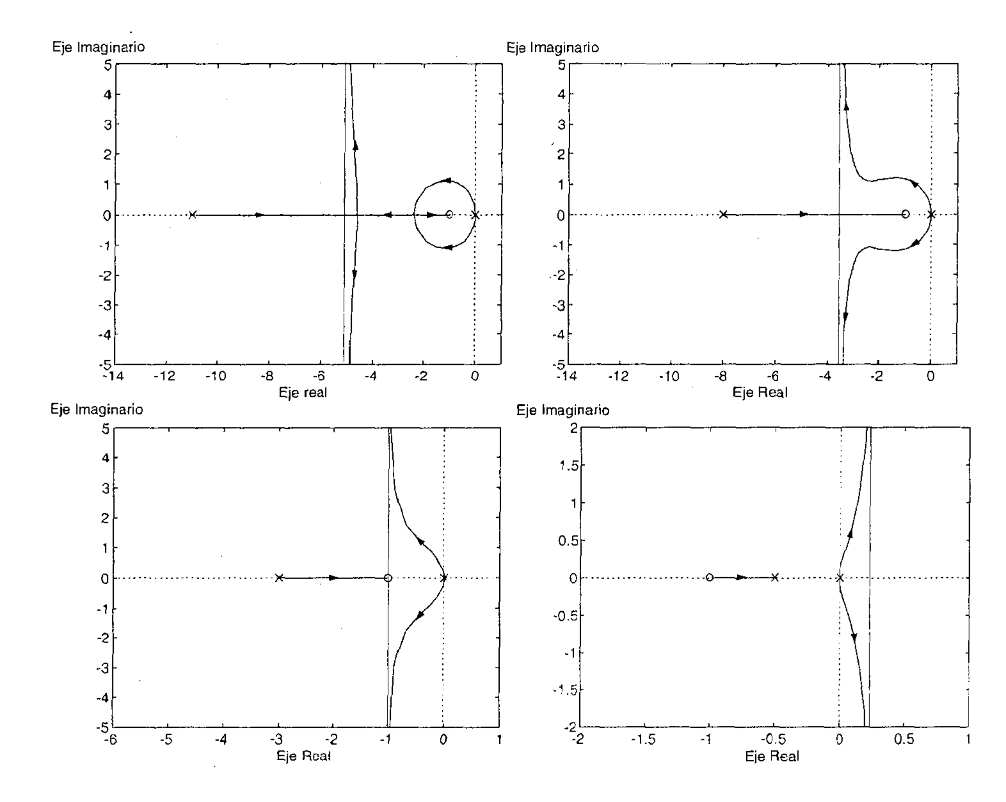
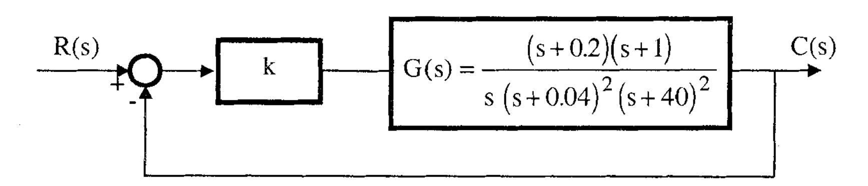


Fig. 2.46. Efecto sobre el LGR del movimiento de un polo hacia el semiplano derecho.

Ejemplo 2.13

Se desea dibujar el lugar geométrico de las raíces del siguiente sistema:



Calcular:

1.- Lugar geométrico de las raíces sobre el eje real.

2.- Asíntotas, sus puntos de cruce por el eje real y sus puntos de intersección con el eje imaginario.

3.- Puntos de cruce del LGR con el eje imaginario, utilizando para ello el diagrama de Bode de la figura 2.47, que representa la evaluación de la función de transferencia G(s) sobre el eje imaginario.

4.- Rango de valores de k para el cual el sistema en lazo cerrado es estable.

5.- Puntos de ruptura del LGR y valores de k asociados a los mismos, utilizando para ello la gráfica de la figura 2.48, que representa la evaluación sobre el eje real del módulo de la función de transferencia G(s).

6.- Dibujar el lugar geométrico de las raíces resultante.

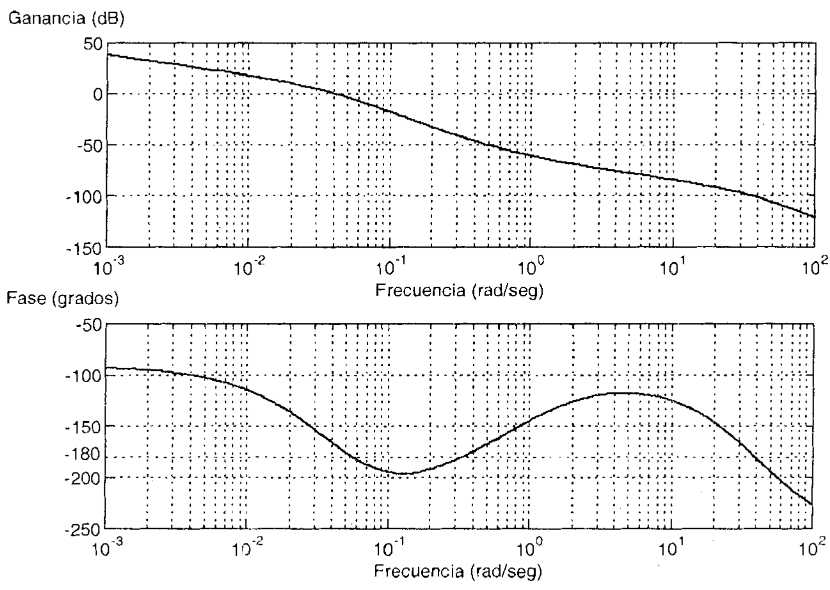


Fig. 2.47 Diagrama de Bode en módulo y fase de G(s)

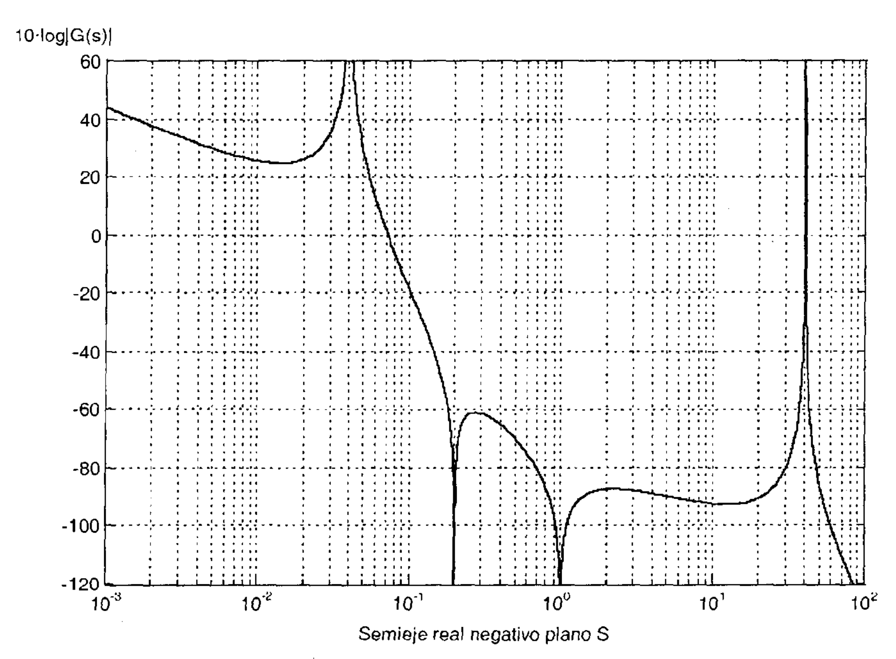


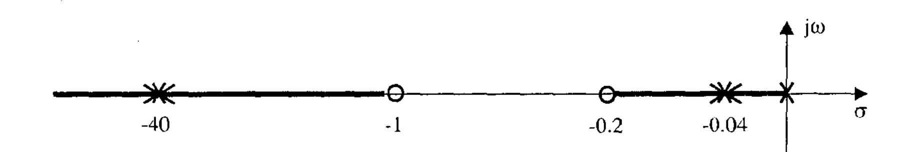
Fig. 2.48 Módulo de G(s) evaluada sobre el eje real

Solución:

1.- LGR sobre el eje real:

Polos LA: $s_{p1} = 0$ $\quad s_{p2,3} = -40$ (doble) $\quad s_{p4,5} = -0.04$ (doble)

Ceros LA: $s_{c1} = -1$ $\quad s_{c2} = -0.2$



2.- Asíntotas:

$$\theta_a = \frac{\pm 180 \cdot (2\lambda + 1)}{n - m} = \frac{\pm 180 \cdot (2\lambda + 1)}{5 - 2} = \begin{cases} \pm 60^\circ \\ 180^\circ \end{cases}$$

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n - m} = \frac{-2 \cdot 40 - 2 \cdot 0.04 + 1 + 0.2}{5 - 2} = -26.3$$

Punto de intersección de las asíntotas con el eje imaginario: $\omega_a = \sigma_a \cdot \text{tg } 60^\circ = 45.55$

3.- Puntos de cruce con el eje imaginario:

Sabemos que el diagrama de Bode de la figura 2.47 representa el módulo y la fase de la función de transferencia G(s) evaluada sobre el eje imaginario, por tanto conocemos el valor que toman estas dos magnitudes para cada punto sobre dicho eje.

Sabemos también que los puntos de cruce del LGR por el eje imaginario son puntos que deben pertenecer al LGR, y para ello deben cumplir la condición de ángulo:

$$G(s_a) \in LGR \Leftrightarrow Fase[G(s_a)] = \pm 180°$$

En consecuencia, para obtener los puntos del LGR que se encuentran sobre el eje imaginario (puntos de intersección del LGR con el eje $j\omega$), únicamente deberemos considerar las frecuencias del diagrama de Bode para las cuales tengamos ±180° de fase.

Observando el diagrama de Bode de la figura 1, comprobamos que las frecuencias a las cuales la fase de G(s) es de ±180°, son:

$$\omega = 0.055 \qquad \omega = 0.35\omega = 40$$

que se corresponderán con los puntos de cruce del LGR con el eje imaginario.

4.- Margen de valores de k para el cual el sistema es estable:

Sabiendo que el límite de estabilidad se da cuando los polos en lazo cerrado se sitúan sobre el eje imaginario, podemos determinar los valores de k asociados a los puntos de intersección del LGR sobre dicho eje, obtenidos en el apartado anterior, para poder obtener los valores de k que situarán al sistema en el límite de la estabilidad.

$$\text{Para } s = \pm j0.055 \quad \Rightarrow \quad k = 1.9592$$

$$\text{Para } s = \pm j0.35 \quad \Rightarrow \quad k = 162.73$$

$$\text{Para } s = \pm j40 \quad \Rightarrow \quad k = 127958.55$$

Conociendo la forma del LGR, podemos decir que:

$$0 < k < 1.9592 \quad \Rightarrow \quad \text{Sistema estable}$$

$$1.9592 \leq k \leq 162.73 \quad \Rightarrow \quad \text{Sistema inestable}$$

$$162.73 < k < 127958.55 \quad \Rightarrow \quad \text{Sistema estable}$$

$$k \geq 127958.55 \quad \Rightarrow \quad \text{Sistema inestable}$$

5.- Puntos de ruptura del LGR:

Se puede demostrar que: $\dfrac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow \dfrac{d(G(s))}{ds} = 0$

Para ello, de la ecuación característica: $1 + k \cdot G(s) = 0 \Rightarrow k = -\dfrac{1}{G(s)}$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\left[-\frac{1}{G(s)}\right] = \frac{\frac{d(G(s))}{ds}}{(G(s))^2} = 0 \Rightarrow \frac{d(G(s))}{ds} = 0$$

En conclusión: los puntos de ruptura se corresponden con los máximos y mínimos de G(s).

De este modo, para obtener los puntos de ruptura sobre el eje real, podremos hacerlo observando los máximos y mínimos de la gráfica del módulo de G(s) evaluado sobre el eje real, que tenemos en la figura 2.48. Ahora bien, deberemos tener cuidado, porque los puntos que se corresponden con los polos y ceros en lazo abierto provocan valores infinitos en la gráfica, debido a que la escala es logarítmica. Así, consideraremos únicamente los máximos y mínimos relativos.

De la gráfica obtenemos que los puntos de ruptura son:

$\sigma \approx 1.5 \cdot 10^{-2}$	$\Rightarrow$	Punto de ruptura de dispersión.
$\sigma \approx 2.2$	$\Rightarrow$	Punto de ruptura de confluencia.
$\sigma \approx 12$	$\Rightarrow$	Punto de ruptura de dispersión.

Nota: Podemos observar, según la figura 2, que en la zona del semieje real comprendida entre $\sigma = 0.2$ y $\sigma = 1$ existe otro máximo relativo, pero, a diferencia de los demás, éste no se corresponde con un punto de ruptura, ya que los valores de σ correspondientes a esta zona no pertenecen al LGR, como podemos comprobar en el apartado 1.

Los valores de ganancia k asociados a dichos puntos de ruptura, calculados mediante la sustitución del valor de σ obtenido en la ecuación que nos define k, serán los siguientes:

Para $s = -1.5 \cdot 10^{-2}$	$\Rightarrow$	$k = 0.08225$
Para $s = -2.2$	$\Rightarrow$	$k = 6110.8$
Para $s = -12$	$\Rightarrow$	$k = 10367.7$

6.- Dibujar el LGR:

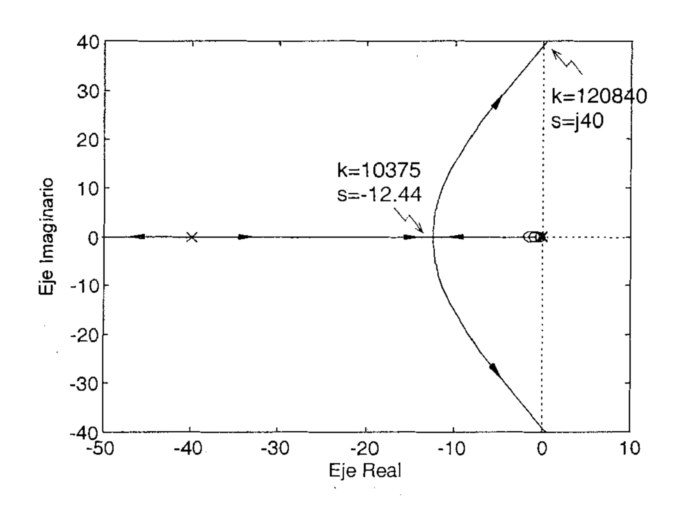


Fig. 2.49 Lugar geométrico de las raíces de G(s)

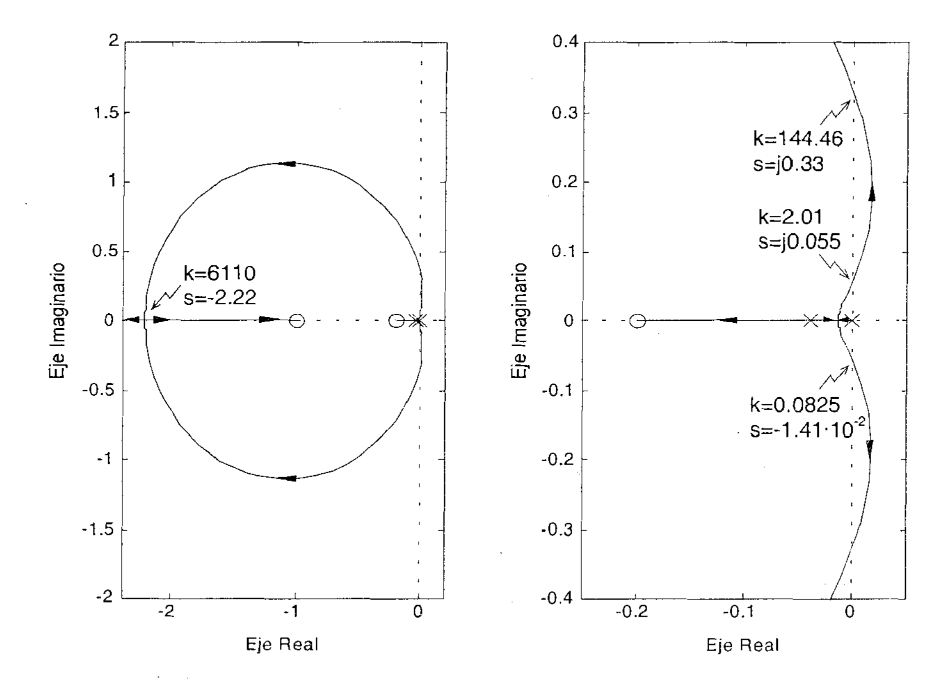


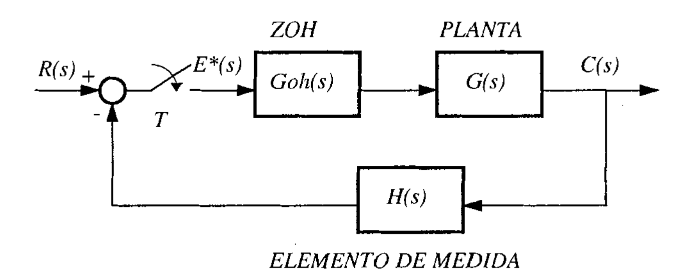
Fig. 2.50 Ampliación de la zona del LGR próxima al origen

2.6.4 LGR en sistemas discretos.

En un sistema discreto pueden evaluarse las raíces de la ecuación característica mediante el LGR trazado en el plano Z. Ello es posible debido a que la ecuación característica de un sistema discreto lineal invariante en el tiempo es una función racional de polinomios en Z. Por lo tanto, puede aplicarse el mismo conjunto de reglas de trazado del LGR que en sistemas analógicos, con la salvedad de que, además, deben obtenerse los puntos de cruce del LGR con el circulo de radio unidad en el plano Z.

Ejemplo 2.14

Calcular el LGR del siguiente sistema



siendo $H(s) = 1;\ G(s) = \dfrac{k}{s\cdot(s+1)};\ T = 1$ seg.

$$G_{LA}(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{k}{s\cdot(s+1)}\right\} = \frac{0.368k\cdot(z+0.717)}{z^2-1.368z+0.368}$$

- Polos en: $z_{p1}=1$; $z_{p2}=0.368$ y ceros en $z_{c1}=-0.717$
- Asíntotas: $\pm 180°$
- Puntos de ruptura: $z_1=0.67$; $K_{z1}=0.196$
  $z_2=-2.11$; $K_{z2}=15.01$
- Corte con el eje imaginario: $z_3=\pm j1.161$
- Corte con el circulo unitario. Para calcular estos puntos se aplica el criterio de Routh sobre el plano transformado W, ya que el circulo de radio unidad del plano Z se transforma mediante la transformada bilineal en el eje imaginario del plano W.

$$G_{LA}(w) = G_{LA}(z)\Big|_{z=\frac{1+0.5w}{1-0.5w}}$$

$$0 = 1+G_{LA}(w) = \frac{(1-0.038k)w^2+(0.924-0.386k)w+0.924k}{w(w+0.924)}$$

Si a continuación se aplica el criterio de Routh, se encuentra que el sistema será estable para 0<k<2.39. Si se sustituye el valor límite de k en la ecuación característica, se encuentra la posición del LGR sobre el circulo unitario, $z=0.245\pm j0.97$ (modulo=1; fase=$\pm 75.8°$).

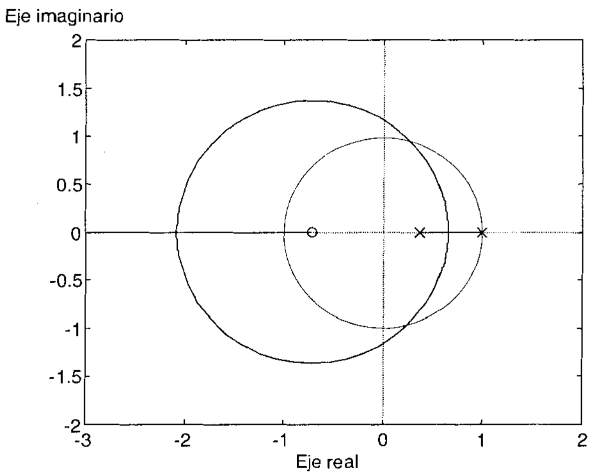


Fig. 2.51 Lugar geométrico de raíces discreto

Por último, debe indicarse que disminuir el periodo de muestreo conlleva modificar el LGR, de manera que aumenta el margen de valores de k para el cual el sistema es estable, y se produce un acercamiento de las ramas del LGR a z=1, indicativo de la menor desvirtuación del sistema discreto frente al sistema continuo equivalente.

Ejemplo 2.15

Si se repite el ejemplo anterior con T=0.1 seg se obtiene el siguiente LGR.

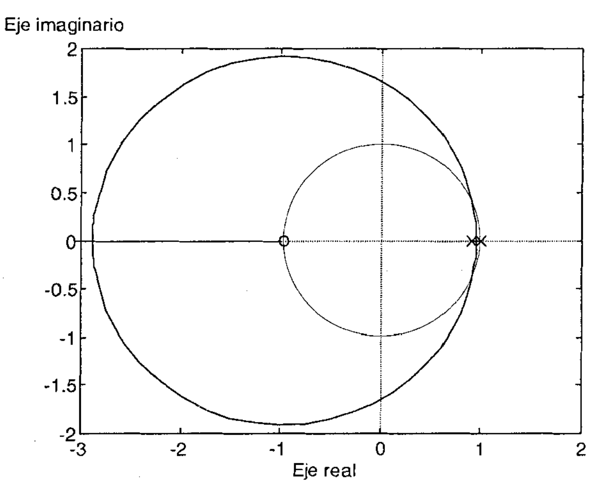


Fig. 2.52 Lugar geométrico de raíces discreto

Donde el rango de valores de k para el cual el sistema es estable es 0<k<20.3

2.7 Problemas.

Problema 1

Dado el sistema de la figura :

Donde $\quad Goh(s) = \dfrac{1-e^{-sT}}{s}$

1.- Obtener la función de transferencia de lazo abierto y la función de transferencia de lazo cerrado del sistema.

2.- Dibujar el LGR del sistema en función de k sabiendo que el periodo de muestreo es T.

3.- Calcular la relación entre el periodo de muestreo T y la ganancia k, que proporciona el límite de estabilidad. Dibujar la curva que relaciona k y T, calculando para ello los valores en los puntos T= 0, 0.1, 0.5, 1, 2 y 10. Razonar el resultado obtenido y compararlo con el sistema continuo equivalente.

Solución:

1.- $G(z) = TZ\left\{\dfrac{1-e^{-sT}}{s}\cdot\dfrac{e^{-sT}}{s+1}\right\} = (1-z^{-1})\cdot z^{-1}\cdot TZ\left\{\dfrac{1}{s\cdot(s+1)}\right\};\ TZ\left\{\dfrac{1}{s\cdot(s+1)}\right\} = TZ\left\{\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}\right\} = \dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z}{z-e^{-T}}$

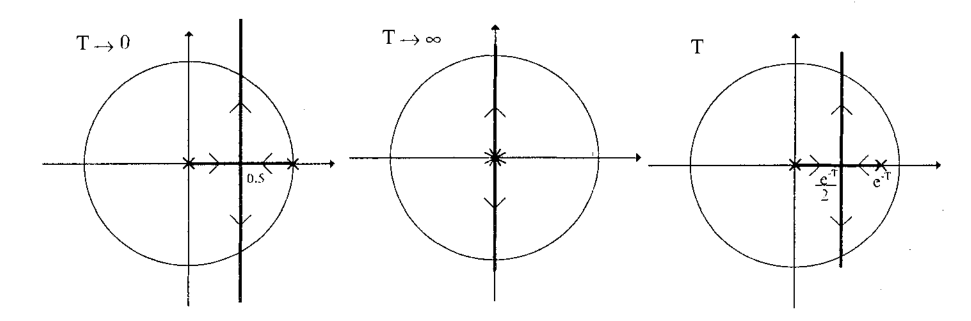
La función de transferencia de lazo abierto es :

$$FT_{LA}(z) = k\cdot G(z) = k\cdot\frac{1-e^{-T}}{z(z-e^{-T})}$$

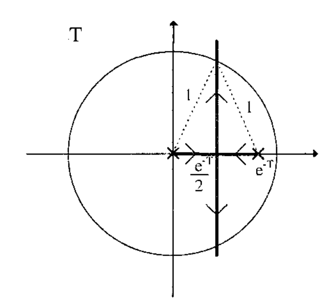
Y la función de transferencia de lazo cerrado :

$$FT_{LC}(z) = \frac{k(1-e^{-T})}{z^2 - z\cdot e^{-T} + k(1-e^{-T})}$$

2.- En lazo abierto hay dos polos y teniendo en cuenta que uno de los polos tiende a z=1 cuando T tiende a cero, y tiende a z=0 cuando T tiende a infinito, habrá por tanto tres posibles LGR dependiendo del valor de T.



3.- La ganancia límite de estabilidad corresponde a la situación de las raíces de lazo cerrado cuando estas cruzan el círculo de radio unidad. La forma más sencilla de calcular esta ganancia es aplicar la condición de módulo :

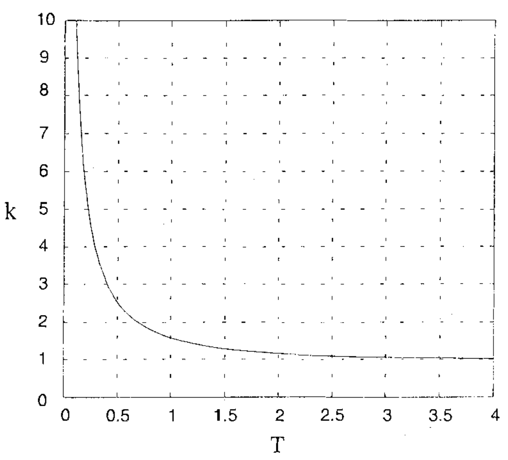


$$|k \cdot G(z)| = 1 \qquad k = \frac{|z| \cdot |z - e^{-T}|}{1 - e^{-T}}$$

De la gráfica se observa que $|z| = 1$; $|z - e^{-T}| = 1$.

Así que : $$k = \frac{1}{1 - e^{-T}}$$

La gráfica que se obtiene de esta relación es :



De la gráfica se observa que, a medida que el periodo de muestreo aumenta, el margen de estabilidad disminuye.

Problema 2

Determinar el lugar geométrico de las raíces de un sistema cuya ganancia de lazo viene dada por:

$$G(s) = \frac{k \cdot \left(s^2 + 0.1056\right)}{s \cdot \left(s^2 + 1\right)}$$

Especificar para ello:

* Polos y ceros en lazo abierto.

* Asíntotas y su cruce por el eje real.

* Puntos de corte con el eje jω.

* Ángulos de salida y llegada de polos y ceros.

* Puntos de ruptura. Especificar si son de confluencia o dispersión.

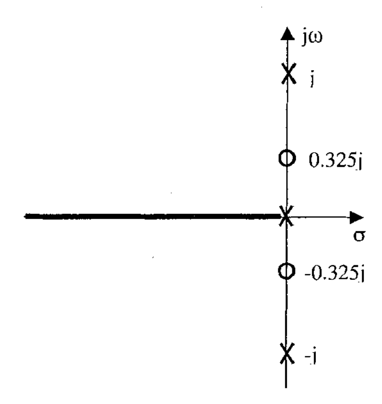
Solución:

1.- Polos y ceros en lazo abierto:

Polos: 0, ±j

Ceros: ±0.325j

2.- LGR en el eje real:



3.- Asíntotas:

La única asíntota e

4.- Puntos de corte

Ecuación caracterí

Algoritmo de Rou

No existe ningún
darán para k = 0, e

5.- Ángulos de sali

Para conocer los á
ángulo del LGR.

3.- Asíntotas:

$$\theta_a = \frac{\pm 180 \cdot (2\lambda + 1)}{n - m}$$

n = número de polos finitos ⇒ n = 3

m = número de ceros finitos ⇒ m = 2

$$\theta_a = \frac{\pm 180 \cdot (2\lambda + 1)}{1} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 & \theta_a = 180^\circ \\ \lambda = 1 & \theta_a = 540^\circ = 180^\circ \end{cases}$$

La única asíntota es el eje real.

4.- Puntos de corte con el eje imaginario:

Ecuación característica: $1 + \frac{k \cdot (s^2 + 0.1056)}{s \cdot (s^2 + 1)} = 0; \quad s^3 + k \cdot s^2 + s + 0.1056 \cdot k = 0$

Algoritmo de Routh:

$$\left\langle \begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & k & 0.1056 \cdot k \\ s^1 & \frac{k - 0.1056}{k} & \\ s^0 & 0.1056 \cdot k & \end{array} \right\rangle$$

No existe ningún valor k > 0 que anule una fila. Los únicos puntos de corte con el eje imaginario se darán para k = 0, es decir, son los polos en lazo abierto ya conocidos.

5.- Ángulos de salida y entrada de polos y ceros:

Para conocer los ángulos de arranque y llegada de los polos y ceros deberemos aplicar la condición de ángulo del LGR.

$$\theta_1 + \theta_2 - (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) = \pm 180^\circ$$

Para ϕ_1: $\quad 90^\circ + 90^\circ - \phi_1 - 90^\circ - 90^\circ = \pm 180^\circ \Rightarrow \quad \phi_1 = 180^\circ$

Para ϕ_2: $\quad -90^\circ + 90^\circ + 90^\circ - \phi_2 - 90^\circ = \pm 180^\circ \Rightarrow \quad \phi_2 = 180^\circ$

Para θ_1: $\quad \theta_1 + 90^\circ + 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = \pm 180^\circ \Rightarrow \quad \theta_1 = 180^\circ$

Como que el LGR es simétrico respecto al eje real, podemos decir que:

$$\theta_2 = 180^\circ \qquad \phi_3 = 180^\circ$$

6.- Determinación de los puntos de ruptura:

Ecuación característica: $\quad 1 + \dfrac{k \cdot (s^2 + 0.1056)}{s \cdot (s^2 + 1)} = 0; \quad k = \dfrac{-s^3 - s}{(s^2 + 0.1056)}$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow \begin{cases} s = \pm 0.4871 \\ s = \pm 0.6677 \end{cases}$$

Los puntos s = 0.4871 y s = 0.6677 no pertenecen al LGR, por tanto no pueden ser puntos de ruptura. Los únicos posibles puntos de ruptura son s = -0.4871 y s = -0.6677.

Comprobaremos si en esos puntos $k > 0$.

$$k\big|_{s=-0.4871} = 1.7577 > 0$$
$$k\big|_{s=-0.6677} = 1.7569 > 0$$

Por tanto tendremos dos puntos de ruptura en el eje real situados en s = -0.4871 y en s = -0.6677 .

Para determinar si son de confluencia o de dispersión, lo podemos hacer de dos maneras:

* Buscar la segunda derivada $\dfrac{d^2k}{ds^2}$ y ver si los puntos son máximos o mínimos.

* Sabiendo que las ramas salen de los polos con ángulos de 180° y que llegan a los ceros con ángulos de 180°, y que además, estas dos ramas no pueden cruzarse, ya que provocarían puntos de ruptura adicionales inexistentes, la única solución posible es que s = -0.6677 sea de confluencia y s = -0.4871 sea de dispersión.

Por tanto el gráfico del LGR quedará de la forma:

Problema 3

Determinar el lu
expresión:

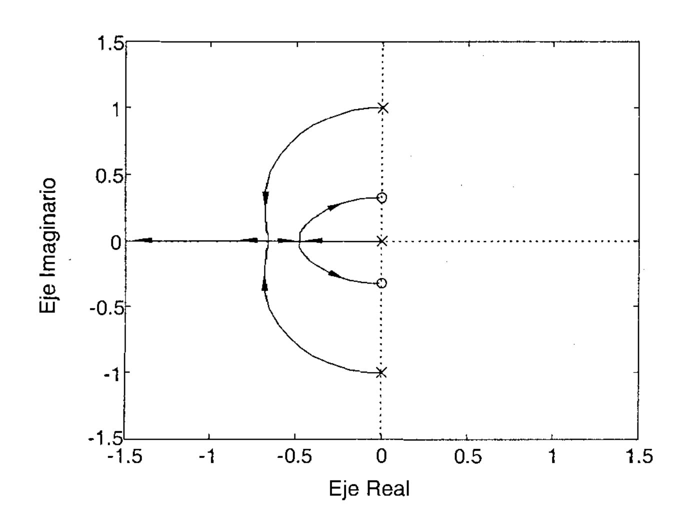
Especificar para

* Polos
* Asínto
* Puntos
* Ángul
* Puntos

Solución:

1.- Polos y ceros

2.- LGR sobre el e



Problema 3

Determinar el lugar geométrico de las raíces de un sistema cuya ganancia de lazo viene dada por la expresión:

$$G(s) = \frac{k}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

Especificar para ello:

* Polos y ceros en lazo abierto.

* Asíntotas y su cruce por el eje real.

* Puntos de corte con el eje $j\omega$.

* Ángulos de salida de los polos.

* Puntos de ruptura sabiendo que una raíz de la ecuación $\frac{dk}{ds} = 0$ es $s = -1$.

Solución:

1.- Polos y ceros en lazo abierto:

$$s_{p1,2} = -1 \pm j \qquad s_{p3,4} = -1 \pm 2j$$

$$s_c = \infty \text{ (cuarto orden)}$$

2.- LGR sobre el eje real:

Como en el eje real no existe ninguna singularidad, el eje real no puede pertenecer al LGR.

3.- Asíntotas:

$$\theta_a = \frac{\pm 180 \cdot (2\lambda + 1)}{n - m} = \frac{\pm 180 \cdot (2\lambda + 1)}{4 - 0} = \pm 45^{\circ}$$

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n - m} = \frac{(-1 + j) + (-1 - j) + (-1 + 2j) + (-1 - 2j)}{4 - 0} = -1$$

4.- Puntos de cruce con el eje imaginario:

$$1 + G(s) = 0 \;\Rightarrow\; s^4 + 4s^3 + 11s^2 + 14s + 10 + k = 0$$

Aplicando el algoritmo de Routh y anulando la fila s^1, obtenemos el valor de k que lo permite:

$$k = 16.25$$

Para este valor de k, y a partir del polinomio auxiliar, conseguimos los puntos de cruce con $j\omega$.

$$s_{1,2} = \pm j1.87$$

5.- Ángulos de arranque:

Aplicando la condición de ángulo sobre cada uno de los polos complejos conjugados en LA, se obtiene que los ángulos de salida de cada uno de ellos son:

$$\theta s_1 = 90^{\circ} \qquad \theta s_2 = -90^{\circ} \qquad \theta s_3 = -90^{\circ} \qquad \theta s_4 = 90^{\circ}$$

6.- Puntos de ruptura:

De la ecuación característica 1 + G(s) = 0, obtenemos $\frac{dk}{ds} = -\left(4s^3 + 12s^2 + 22s + 14\right) = 0$.

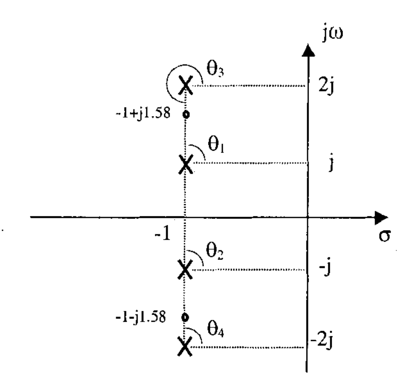
Sabiendo que s = -1 es una raíz de la ecuación anterior, podemos aplicar Rufini para calcular las otras dos raíces:

$$\frac{dk}{ds} = (s + 1)(s + 1 + j1.58)(s + 1 - j1.58) = 0$$

Para comprobar si las raíces de la ecuación corresponden o no a puntos de ruptura, deberemos verificar en primer lugar si pertenecen o no al LGR.

Evidentemente s = -1 no puede ser un punto de ruptura porque es un punto que no pertenece al LGR, ya que no existe LGR sobre el eje real, como hemos comprobado anteriormente.

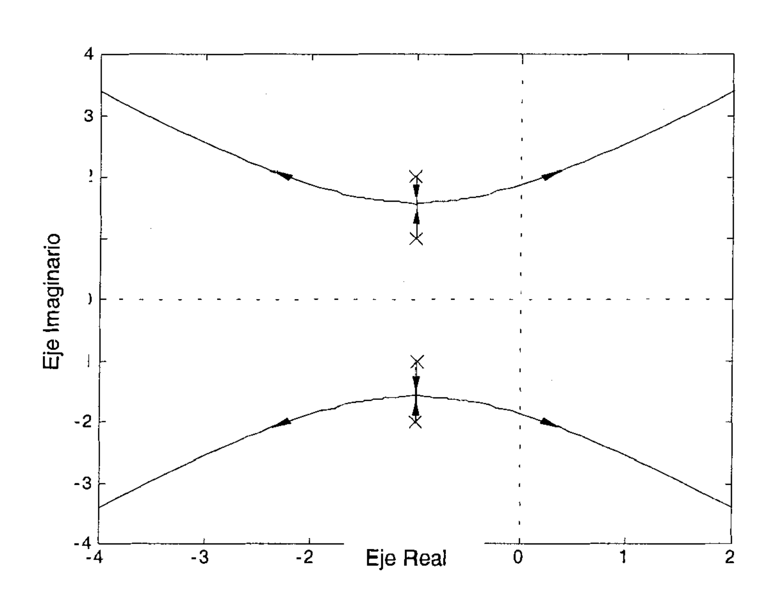
En cuanto a las raíces complejas conjugadas, podemos comprobar su pertenencia al LGR mediante la condición de ángulo.



Respecto al punto s = -1 +j1.58: $-(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = -(90° + 90° -90° + 90°) = -180°$. Es decir, que cumple la condición de ángulo y por tanto pertenece al LGR. Por simetría, su complejo conjugado también pertenecerá.

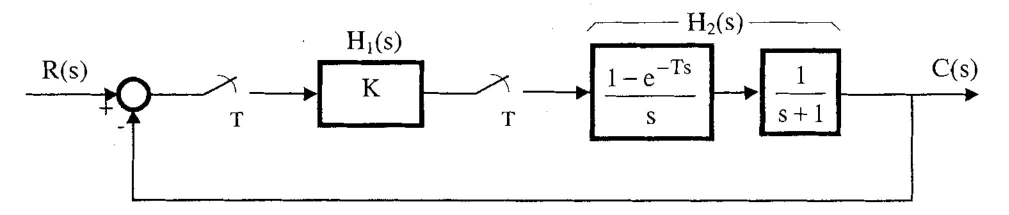
Podemos comprobar que los valores de k asociados a estos puntos son positivos, en consecuencia son efectivamente puntos de ruptura.

El lugar geométrico de las raíces quedará entonces de la forma siguiente:



Problema 4

Dado el sistema de la figura siguiente:



Se pretende observar cómo depende la estabilidad del sistema de la elección del periodo de muestreo T. Para ello, encontrar una relación entre T y el valor de K que proporciona el límite de estabilidad.

Solución:

$$H(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{H_1(z)H_2(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$$

$$H_1(z) = K$$

$$H_2(z) = TZ\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{1}{s+1}\right\} = \left(1-z^{-1}\right)\cdot TZ\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \left(1-z^{-1}\right)\cdot TZ\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\}$$

$$H_2(z) = \frac{z-1}{z}\cdot\left\{\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}\right\} = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

$$H(z) = \frac{K\dfrac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}}{1+K\dfrac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}} = \frac{K\left(1-e^{-T}\right)}{z-e^{-T}\left(1+K\right)+K}$$

La ecuación característica vendrá determinada por el denominador de la función de transferencia:

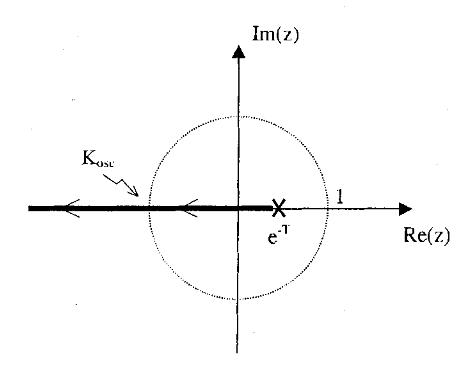
$$z - e^{-T}\left(1+K\right) + K = 0$$

$$\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} = -\frac{1}{K}$$

Dibujaremos el LGR para observar la dependencia de la estabilidad del sistema con K.

La función de transferencia en lazo abierto viene dada por la expresión: $H_1(z)H_2(z) = \dfrac{K\left(1-e^{-T}\right)}{z-e^{-T}}$

Podemos observar que sólo existe un polo en lazo abierto situado en $z=e^{-T}$. Este polo será el punto inicial del LGR. En consecuencia, el LGR tendrá la forma siguiente:



Para T=1, el polo en lazo abierto está situado en $z = e^{-1} = 0.368$. Para este valor de T, el sistema deja de ser estable cuando la rama del LGR cruza el círculo de radio unidad:

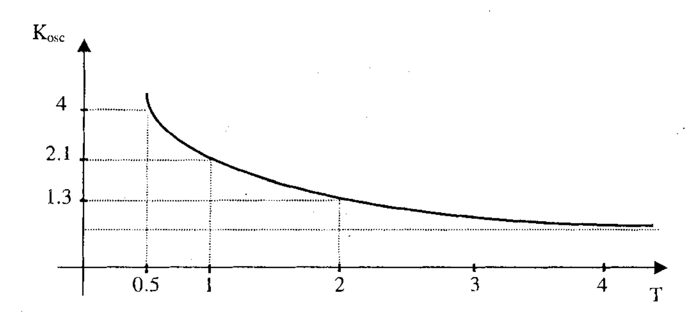
$$z = e^{-1}(1+K) - K = -1 \quad \Rightarrow \quad K_{osc} = 2.2$$

Ahora trataremos de encontrar una relación entre el periodo de muestreo T y el factor de ganancia K que hace oscilar el sistema.

$$e^{-T}(1+K_{osc}) - K_{osc} = -1$$

$$K_{osc} = \frac{1+e^{-T}}{1-e^{-T}}$$

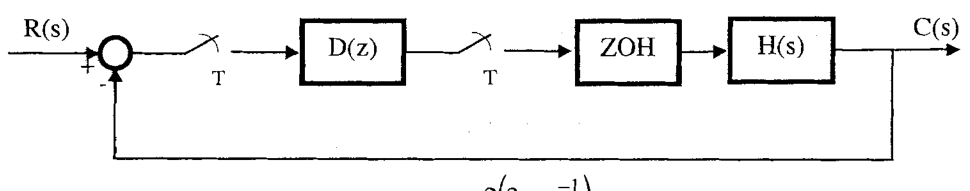
Este relación puede expresarse gráficamente como se puede observar en la figura:



Con lo cual podemos comprobar que, a medida que T aumenta, el rango de estabilidad del sistema disminuye.

Problema 5

Dado el diagrama de bloques de un sistema discreto como el de la figura:



donde: $T = 2 \cdot \ln 2$ seg. $D(z) = \dfrac{2\left(3 - z^{-1}\right)}{3\left(1 - z^{-1}\right)}$ $H(s) = \dfrac{k}{2s+1}$

1.- Determinar, para k=1.5, la función de transferencia $\dfrac{C(z)}{R(z)}$.

2.- Dibujar el lugar geométrico de las raíces del sistema, para k desde 0 a ∞, especificando para ello:

* LGR sobre el eje real.
* Asíntotas.
* Puntos de ruptura.
* Puntos de corte con el círculo unitario.
* Puntos de corte con el eje imaginario.

3.- ¿Para qué valores de k se vuelve inestable el sistema?

Nota: La ecuación característica en el plano transformado W tiene la forma:

$$1 + \frac{-0.44444 \cdot (w + 0.721347) \cdot (w - 1.442695) \cdot k}{w \cdot (w + 0.4808984)} = 0$$

Solución:

1.-

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z) Z_{oh} H(z)}{1 + D(z) Z_{oh} H(z)}$$

$$Z_{oh}H(z) = \left(1-z^{-1}\right)\cdot TZ\left\{\frac{\frac{1.5}{2s+1}}{s}\right\} = \frac{z-1}{z}\cdot TZ\left\{\frac{1.5}{s(2s+1)}\right\} = \frac{z-1}{z}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{z}{(z-1)\cdot(z-0.5)}$$

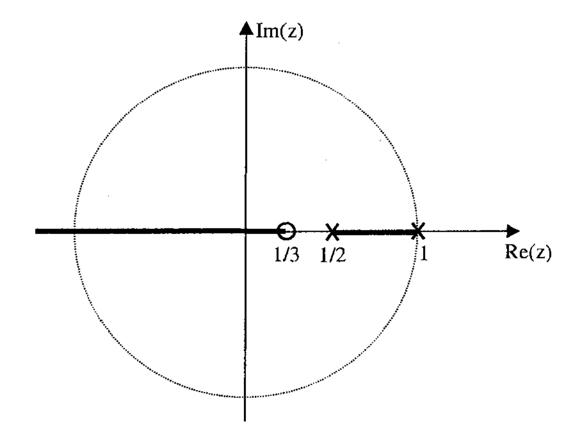
$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\frac{2(3z-1)}{3(z-1)}\cdot\frac{z}{4(z-1)\cdot(z-0.5)}\cdot\frac{z-1}{z}}{1+\frac{2(3z-1)}{3(z-1)}\cdot\frac{z}{4(z-1)\cdot(z-0.5)}\cdot\frac{z-1}{z}} = \frac{3z-1}{2z^2}$$

2.-

$$TZ\{Z_{oh}H(s)\} = \frac{z-1}{z}\cdot TZ\left\{\frac{k}{s(2s+1)}\right\} = \frac{z-1}{z}\cdot k\cdot TZ\left\{\frac{0.5}{s(s+0.5)}\right\} = \frac{0.5\cdot k}{z-0.5}$$

$$D(z)\cdot TZ\{Z_{oh}H(s)\} = \frac{2(3z-1)}{3(z-1)}\cdot\frac{0.5\cdot k}{z-0.5} = \frac{k\cdot\left(z-\frac{1}{3}\right)}{(z-1)\cdot(z-0.5)}$$

* LGR sobre el eje real:



* Asíntotas:

$$\theta_a = \frac{\pm 180\cdot(2\lambda+1)}{n-m} = \frac{\pm 180\cdot(2\lambda+1)}{2-1} = \begin{cases} \lambda = 0 \Rightarrow \pm 180^\circ \\ \lambda = 1 \Rightarrow \pm 540^\circ = \pm 180^\circ \end{cases}$$

* Puntos de ruptura:

$$k = -\left(\frac{(z-1)\cdot(z-0.5)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)}\right) = -\left(\frac{z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{3}}\right)$$

$$\frac{dk}{dz} = \frac{\left(2z-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(z-\frac{1}{3}\right)-\left(z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{z^2-\frac{2}{3}z}{\left(z-\frac{1}{3}\right)^2} = 0$$

$$z^2-\frac{2}{3}z = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} z = 0 & \in \text{LGR} \\ z = 0.6666 & \in \text{LGR} \end{cases}$$

$$k\big|_{z=0} = 1.5 \geq 0 \;\Rightarrow\; \text{Es punto de ruptura}$$

$$k\big|_{z=0.6666} = 0.16666 \geq 0 \;\Rightarrow\; \text{Es punto de ruptura}$$

* Puntos de corte con el círculo unitario:

Deberemos aplicar el criterio de Routh modificado.

Podemos observar, según el LGR sobre el eje real, que cortará al círculo unitario en $z = 1$ y en $z = -1$, pero debemos saber con qué valor de k cortará en estos puntos, y si existen o no otros puntos de corte.

$$0 = 1 + D(z)\cdot TZ\{Z_{oh}H(s)\} = 1 + \left.\frac{k\cdot\left(z-\frac{1}{3}\right)}{(z-1)\cdot(z-0.5)}\right|_{z=\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}}$$

De la nota del enunciado sabemos que la transformada bilineal de la ecuación característica es:

$$1 + \frac{-0.44444\cdot(w+0.721347)\cdot(w-1.442695)\cdot k}{w\cdot(w+0.4808984)} = 0$$

$$(1-0.4444k)\cdot w^2 + (0.4808984+0.32059k)\cdot w + 0.462521\cdot k = 0$$

$$\left\langle\begin{array}{l|ll} w^2 & 1-0.4444\cdot k & 0.462521\cdot k \\ w^1 & 0.4808984+0.32059\cdot k & \\ w^0 & 0.462521\cdot k & \end{array}\right\rangle$$

$$0.462521 \cdot k > 0 \Rightarrow k > 0$$

$$0.4808984 + 0.32059 \cdot k > 0 \Rightarrow k > -1.5$$

$$1 - 0.4444 \cdot k > 0 \Rightarrow k < 2.25$$

Margen de estabilidad: $0 < k < 2.25$

Sustituyendo en la ecuación característica:

$$1 + \left.\frac{k \cdot (z - 1/3)}{(z-1)\cdot(z-0.5)}\right|_{k=2.25} = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 + 0.75z - 0.25 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 0.25 \\ z_2 = -1 \end{cases}$$

El sistema deja de ser estable cuando el LGR corta el círculo unitario. Para el caso que nos ocupa, esto se da en $z = -1$ para un valor de $k = 2.25$.

Para el otro posible valor límite de k ($k = 0$):

$$1 + \left.\frac{k \cdot (z - 1/3)}{(z-1)\cdot(z-0.5)}\right|_{k=2.25} = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 3/2\, z + 0.5 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 0.5 \end{cases}$$

Es decir, para $k = 0$, estaremos situados en $z = 1$ y $z = 0.5$, siendo $z = 1$ otro de los márgenes de estabilidad. En consecuencia, el LGR no cortará al círculo unitario en otros puntos que no sean $z = 1$ y $z = -1$.

* Puntos de corte con el eje imaginario:

Para ello aplicaremos el criterio de estabilidad de Routh directamente al polinomio resultante de la ecuación característica $1+G(z) = 0$, igualando una fila a 0 para hallar las raíces imaginarias.

$$1 + \frac{k \cdot (z - 1/3)}{(z-1)\cdot(z-0.5)} = 0$$

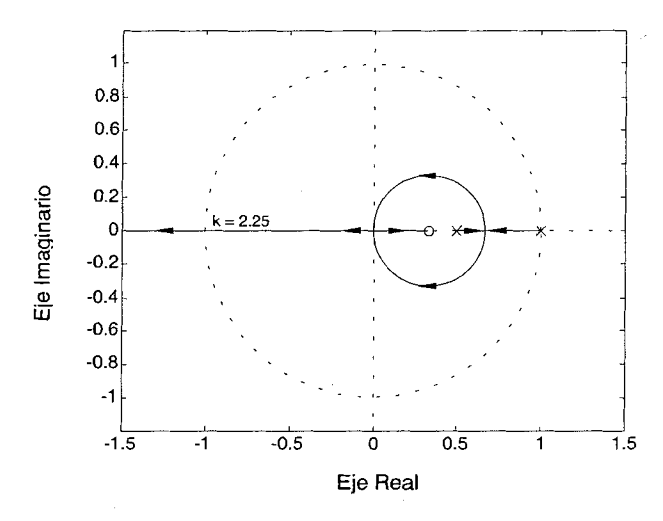
$$z^2 + (k - 3/2)\cdot z + 0.5 - \frac{k}{3} = 0$$

$$\left\langle \begin{array}{c|cc} z^2 & 1 & 0.5 - \frac{k}{3} \\ z^1 & k - 3/2 & \\ z^0 & 0.5 - \frac{k}{3} & \end{array} \right\rangle$$

$$0.5-\frac{k}{3}=0 \Rightarrow k=1.5$$

$$k-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow k=1.5$$

Para k = 1.5 en la fila z^1: $z^2-\left(0.5-\frac{1.5}{3}\right)=0 \Rightarrow z^2=0 \Rightarrow z=0$



Problema 6

Dado el sistema de la figura 1:

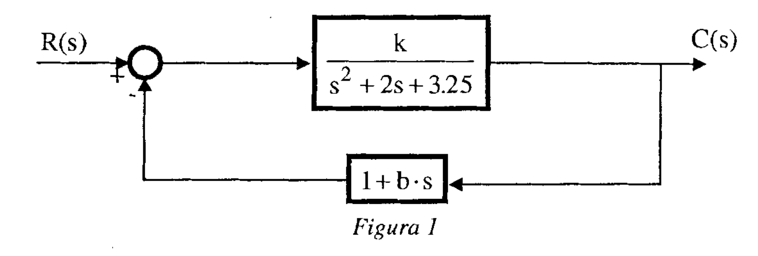


Figura 1

1.- Diseñar k y b para tener un error estacionario de posición del 10%, así como un coeficiente de amortiguamiento de los polos en lazo cerrado de 0.707.

2.- Manteniendo el valor de k calculado anteriormente, dibujar el lugar geométrico de las raíces en función de b. Para ello calcular:

* LGR sobre el eje real.

* Ángulos de las asíntotas y su punto de intersección con el eje real.

* Puntos de ruptura.

* Ángulos de arranque de los polos y llegada a los ceros.

3.- En la figura 2 se muestra una topología alternativa a la anterior, que posee los mismos polos en lazo cerrado para los mismos valores de k y b.

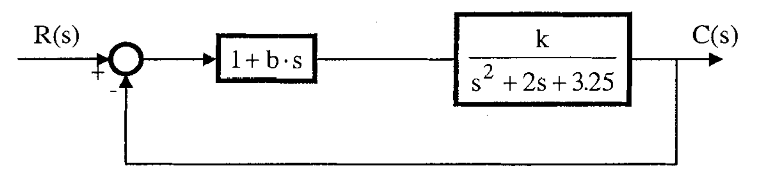
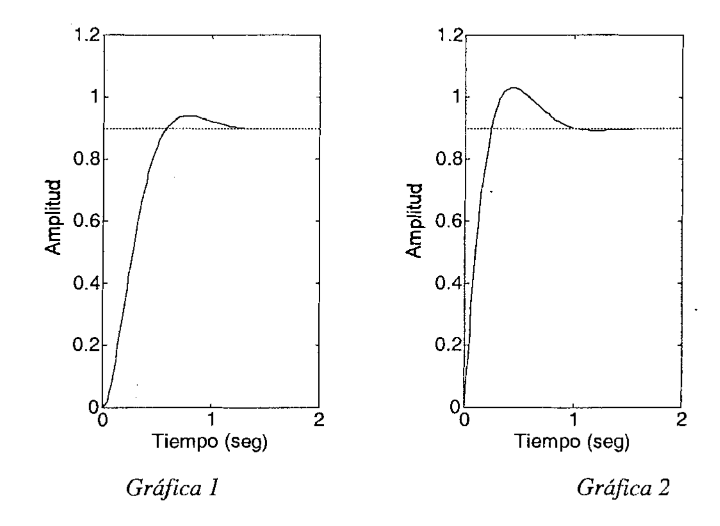


Figura 2

Relacionar cada una de las topologías presentadas con las respuestas temporales en lazo cerrado al escalón que se pueden ver en las gráficas siguientes. Razonar la respuesta.



Gráfica 1 *Gráfica 2*

Solución:

1.- Valor de k y b.

La función de transferencia en lazo abierto tiene la forma:

$$G_{LA}(s) = \frac{k \cdot (1 + b \cdot s)}{s^2 + 2s + 3.25}$$

Se desea un error estacionario de posición del 10%, luego:

$$e_{ssp} = \frac{1}{1 + K_p} = 0.1 \Rightarrow K_p = 9$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} G_{LA}(s) = \lim_{s \to 0} \frac{k \cdot (1 + b \cdot s)}{s^2 + 2s + 3.25} = \frac{k}{3.25} \quad \Rightarrow \quad k = 3.25 \cdot 9 = 29.25$$

Por otra parte, se exige un coeficiente de amortiguamiento de los polos en lazo cerrado de 0.707.

La ecuación característica: $1+G_{LA}(s)=0 \Rightarrow 1+\dfrac{k\cdot(1+b\cdot s)}{s^2+2s+3.25}=0$

$$s^2+(2+29.25\cdot b)\cdot s+32.5=0$$

$$\omega_n{}^2=32.5 \Rightarrow \omega_n=5.7\,\text{rad/s}$$

$$2\xi\omega_n=2+29.25\cdot b \Rightarrow b=0.207$$

2.- Lugar geométrico de las raíces en función de b.

Arreglando la ecuación característica:

$$1+\frac{29.25\cdot b\cdot s}{s^2+2s+32.5}=0$$

Raíces:

$s_{1,2}=-1\pm j5.6125 \Rightarrow$ Polos complejos conjugados.

$s=0 \Rightarrow$ Cero en origen.

* LGR sobre el eje real: Todo el semieje real negativo.

* Ángulos de las asíntotas y su punto de intersección con el eje real:

Tenemos el eje real como única asíntota, en consecuencia no es necesario calcular el punto de intersección de la misma.

* Puntos de ruptura:

$$b=-\frac{s^2+2s+3.25}{29.25\cdot s}$$

$$\frac{db}{ds}=0 \Rightarrow s^2-32.5=0 \Rightarrow s_{1,2}=\pm 5.7$$

$s=5.7\notin$ LGR $\Rightarrow$ No es punto de ruptura.

$s=-5.7\in$ LGR; $b|_{s=-5.7}=0.3214\geq 0 \Rightarrow s=-5.7$ es punto de ruptura.

* Ángulos de arranque de los polos y llegada a los ceros.

- Ángulo de llegada al cero en origen: 180°

- Ángulo de arranque de los polos complejos conjugados:

El lugar geométrico de las r

Eje Imaginario

3.- Identificación de las respue

Para ello deberán observarse la

Fig. 1 $\Rightarrow$ G_{L}

Fig. 2 $\Rightarrow$ G_{L}

Aplicando la expresión del máxi

$$M_p=e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}=4.32\%$$

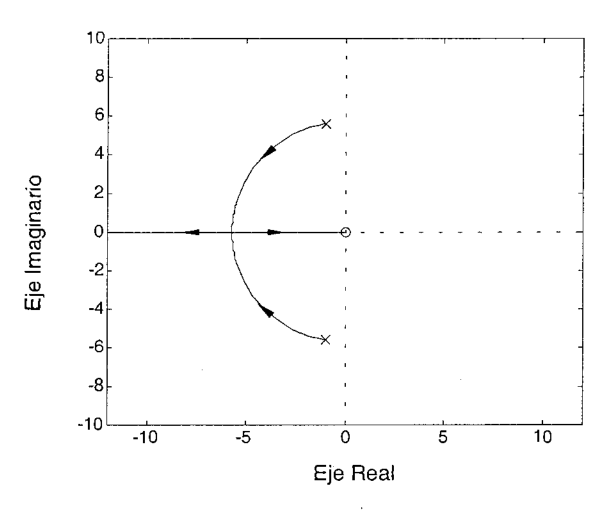
Problema 7

Determinar los parámetros **k, a** cuando el sistema tiene una ramp en estado estacionario finito, y qu de entrada es una señal senoidal c

$$180^{\circ}-\text{arctg}\frac{5.6125}{1}-90^{\circ}-\theta = 180^{\circ}$$

$$\theta = -10.1025^{\circ}$$

El lugar geométrico de las raíces quedará de la forma:



3.- Identificación de las respuestas con las topologías correspondientes.

Para ello deberán observarse las funciones de transferencia en lazo cerrado:

$$\text{Fig. 1} \Rightarrow G_{LC}(s) = \frac{k}{s^2+2s+3.25+k\cdot(1+b\cdot s)} = \frac{29.25}{s^2+8.054s+32.5}$$

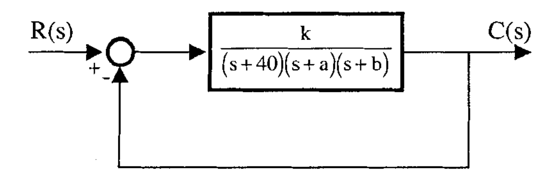
$$\text{Fig. 2} \Rightarrow G_{LC}(s) = \frac{k\cdot(1+b\cdot s)}{s^2+2s+3.25+k\cdot(1+b\cdot s)} = \frac{29.25\cdot(1+0.207s)}{s^2+8.054s+32.5}$$

Aplicando la expresión del máximo sobreimpulso para un sistema de segundo orden subamortiguado:

$$M_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 4.32\% \Rightarrow \text{la gráfica 1 corresponde con la topología de la figura 1.}$$

Problema 7

Determinar los parámetros **k**, **a** y **b** del sistema mostrado en la figura siguiente, conociendo que, cuando el sistema tiene una rampa de entrada, la señal de salida sigue la señal de entrada con un error en estado estacionario finito, y que, cuando la ganancia se dobla a **2k,** la señal de salida a un impulso de entrada es una señal senoidal con un periodo de 0.314 segundos.



Solución:

Error finito a la rampa $\Rightarrow e_{ssp} = 0 \Rightarrow k_p = \infty$

$$k_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{k}{(s+40)(s+a)(s+b)} = \frac{k}{40\cdot a\cdot b} = \infty \quad \Rightarrow \quad a \text{ o } b = 0$$

Ecuación característica:

$$1+\frac{k}{(s+40)(s+a)(s+b)} = 0$$

$$(s+40)(s+a)(s+b)+k = 0$$

Suponiendo b = 0:

$$(s+40)(s+a)s+k = 0 \quad \Rightarrow \quad s^3+(40+a)s^2+40as+k = 0$$

Aplicando el criterio de estabilidad de Routh:

$$\left\langle \begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 40a \\ s^2 & 40+a & k \\ s^1 & \dfrac{(40+a)\cdot 40a-k}{40+a} & \\ s^0 & k & \end{array} \right\rangle$$

Si la ganancia pasa de k a 2k, el sistema es oscilatorio $\Rightarrow$ Raíces sobre eje $j\omega \Rightarrow$ Fila del algoritmo de Routh se hace cero:

$$(40+a)\cdot 40a-2k = 0$$

Las raíces sobre el eje $j\omega$ se corresponden con las raíces del polinomio auxiliar:

$$Pa(s) = (40+a)s^2 + 2k = 0$$

$$s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{2k}{40+a}} = \pm j\omega_d = \pm\frac{2\pi}{T_d} = \pm j\frac{2\pi}{0.314} = \pm j20 \quad \Rightarrow \quad 2k = 400\cdot(40+a)$$

Sustituyendo:

$$(40+a)\cdot 40a - 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad (40+a)\cdot 40a - 400\cdot(40+a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \begin{cases} 10 \\ -40 \Rightarrow \text{Sist. inestable} \end{cases}$$

Así: $a = 10 \Rightarrow k = 200\cdot(40+a) = 200\cdot 50 = 10000$

$$G(s) = \frac{10000}{s(s+10)(s+40)}$$

3. Diseño de sistemas de control en tiempo continuo y discreto

En este capítulo se abordará la teoría clásica de control, presentando primero el contenido dentro del ámbito temporal continuo, donde se analizan los controladores y las soluciones que estos aportan, con herramientas propias de dicho dominio. Posteriormente, debido a la aparición de microprocesadores y microcontroladores en el mundo industrial, se realizará el análisis de los controladores en el ámbito temporal discreto.

3.1 Tipos de controladores

La estructura básica de un sistema de control se muestra en la figura 3.1:

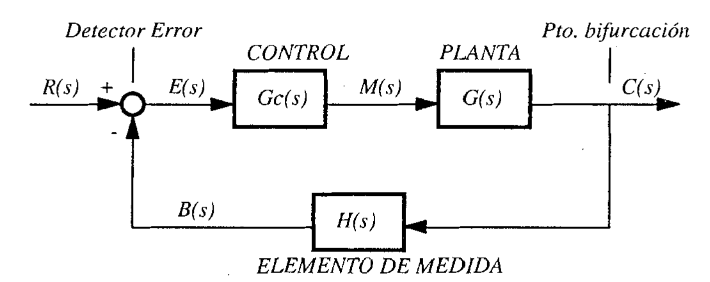


Fig.3.1 Sistema de Control.

En esta figura pueden observarse los diferentes componentes del sistema de control. El control es el elemento encargado de 'procesar' la señal de error y 'generar' una señal encargada de disminuir el valor de dicha señal de error con el objetivo de lograr la máxima precisión posible del sistema de control. El procedimiento mediante el cual el controlador genera la señal de control se denomina acción de control.

Los controles típicos en sistemas de control en tiempo continuo son:

* Control Proporcional (P).

* Control Proporcional Derivativo (PD).

* Control Proporcional Integral (PI).

* Control Proporcional Integral Derivativo (PID).

Se estudiará el funcionamiento de cada uno de estos controles, enfatizando sus efectos sobre el estado estacionario del sistema (errores en estado estacionario), que determinan su precisión, y sobre el estado transitorio, determinado bajo las especificaciones dinámicas requeridas.

3.2 Control proporcional

El controlador proporcional genera a la salida una señal de control que es proporcional a la señal de error. De este modo:

$$m(t) = k \cdot e(t) \Rightarrow M(s) = k \cdot E(s) \tag{3.1}$$

Con lo cual, la función de transferencia del control proporcional es:

$$Gc(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = k \tag{3.2}$$

donde, e(t): señal de error, m(t): señal de control y k: sensibilidad proporcional o ganancia proporcional.

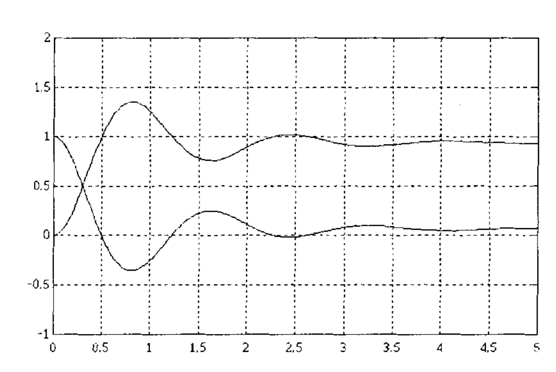


Fig.3.2 Control proporcional con k=15

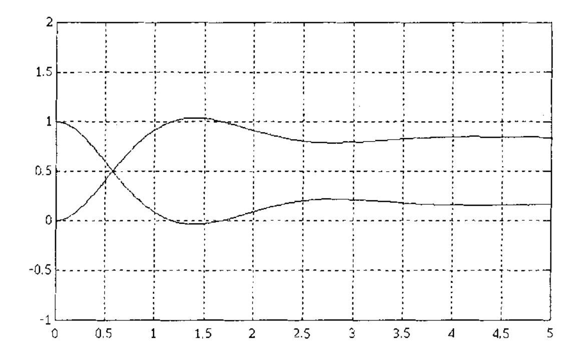


Fig. 3.3 Control proporcional con k=5

En las figuras 3.2 y 3.3 se pueden observar las respuestas típicas (señal de error y señal de salida) de un control proporcional con dos valores diferentes de ganancia proporcional.

Cuanto mayor es la ganancia del control proporcional, mayor es la señal de control generada para un mismo valor de señal de error. De este modo, se puede decir que para una señal de control determinada cuanto mayor es la ganancia del control proporcional, menor es la señal de error actuante. En conclusión, *el aumento de la ganancia del control proporcional permite reducir el error en estado estacionario.* Al error cometido se le denomina error de corrimiento.

Obsérvese la necesidad de tener una señal de error diferente de cero para obtener una señal de control diferente de cero.

$$e(t) = 0 \Rightarrow m(t) = 0; \quad e(t) \neq 0 \Rightarrow m(t) \neq 0$$

Observando en las expresiones de los errores estáticos, para poder eliminar un error estacionario es necesario que la función de transferencia en lazo abierto contenga algún elemento integrador (polo en s=0), siendo el sistema estable, y *el control proporcional no añade al sistema ningún elemento integrador.* Este hecho permite deducir una conclusión importante de un control proporcional: *el control proporcional no permite eliminar un error estacionario.*

Si se calcula el error en régimen estacionario ante una entrada escalón, R(s)=1/s.

$$e_{ssp} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+Gc(s)\cdot G(s)\cdot H(s)} \;;\; Kp = \lim_{s\to 0} Gc(s)\cdot G(s)\cdot H(s) \;;\; essp = \frac{1}{1+Kp} \qquad (3.3)$$

si G(s) tiene un elemento integrador (polo en s=0) entonces $Kp\to\infty$ y $e_{ss}\to 0$

Ejemplo 3.1

A continuación se expone un breve ejemplo en el que se pondrán de manifiesto las propiedades anteriormente comentadas; el sistema a controlar es:

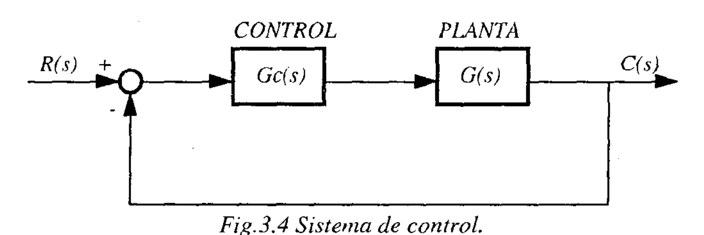


Fig.3.4 Sistema de control.

$$\text{Donde: } G(s) = \frac{1080}{s\cdot(s+6)\cdot(s+18)}; \qquad Gc(s) = K$$

Obsérvese que esta planta posee un polo en el origen, por tanto tiene carácter integrativo, lo que proporciona un error estacionario nulo a una entrada de tipo escalón.

En la figura 3.5 se muestra el lugar geométrico de raíces del sistema descrito en la figura 3.4.

Observando este lugar geométrico de raíces, se puede ver que el sistema tendrá, para una ganancia mayor que la ganancia para la cual ocurre el punto de ruptura, dos polos complejos conjugados cercanos al eje imaginario y un polo real más alejado. Ante esta situación, para simplificar el diseño del control, se puede utilizar una aproximación de polo dominante, tomando los polos complejos conjugados como los que caracterizan el comportamiento dinámico del sistema en lazo cerrado y despreciando el polo real, debido a su breve contribución sobre la respuesta transitoria.

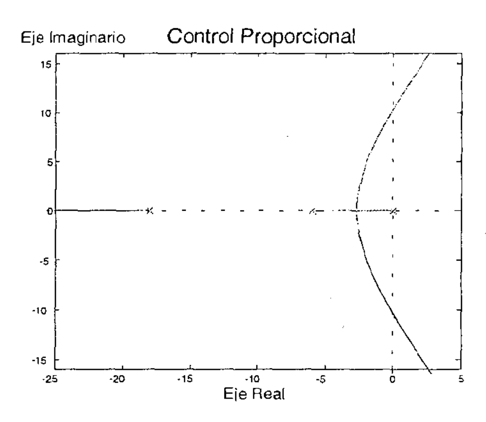


Fig.3.5 Lugar geométrico de las raíces.

También, de la observación del lugar geométrico de raíces mostrado en la figura 3.5, al aplicar la aproximación de polo dominante, se puede deducir que no será posible obtener una respuesta del sistema en lazo cerrado con tiempo de establecimiento (ts) inferior a 1 seg, ya que ninguna rama con raíces complejo conjugadas intercepta con la recta definida por σ≥4. Debe observarse la existencia de una rama del lugar geométrico de las raíces que puede ofrecer σ≥4, pero no proporciona una respuesta dominante.

$$\left(ts = \frac{4}{\sigma}\right)$$

Si una de las especificaciones de diseño es la precisión en estado estacionario y se impone un error estacionario ante una entrada del tipo rampa del 20% (el error estacionario ante una entrada del tipo escalón es nulo), se obtiene una K= 0.5.

$$Kv = \frac{1}{e_{ssv}} = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1080 \cdot K}{s \cdot (s+6) \cdot (s+18)} = 10 \cdot K = 5 \quad \Rightarrow K = 0.5$$

Con este valor de K, los polos en lazo cerrado del sistema se hallarían en:

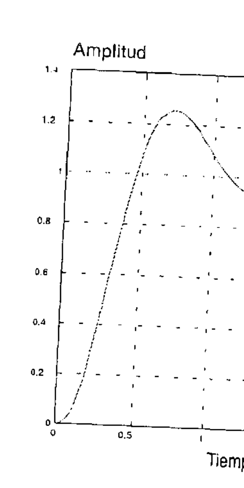
$$1 + \frac{1080 \cdot 05}{s \cdot (s+6) \cdot (s+18)} = 0$$

$$s^3 + 24 \cdot s^2 + 108 \cdot s + 540 = 0$$
$$s_{1,2} = -2.042 \pm j \cdot 4.851$$
$$s_3 = -20$$

Considerando polos dominantes, tendremos las siguientes características de respuesta transitoria:

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 1.96 \text{ seg}$$
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 0.647 \text{ seg}$$
$$M_p = e^{\frac{-\pi \cdot \sigma}{\omega_d}} = 26.65\%$$

Estas características temporales se pueden observar en la figura 3.6. La figura 3.7 presenta la respuesta del sistema frente una entrada tipo rampa.



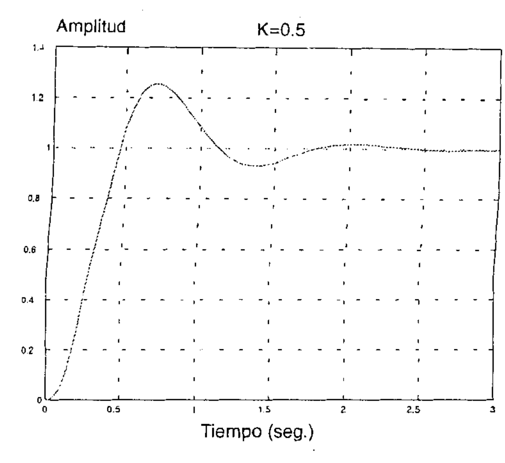


Fig.3.6 Respuesta al escalón.

Amplitud K=0.5

Tiempo (seg.)

Fig.3.7 Respuesta a la rampa.

Si se modifica en el diseño la especificación del error estacionario ante una entrada de tipo rampa al 10%, realizando los mismos cálculos anteriores, se encuentra K=1 para satisfacer dicha condición, lo que supone una situación de los polos en lazo cerrado en:

$$s^3 + 24 \cdot s^2 + 108 \cdot s + 1080 = 0$$
$$s_{1,2} = -1.338 \pm j \cdot 7$$
$$s_3 = -21.34$$

Las características de respuesta transitoria, en este caso, son:

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 3 \text{ seg}$$
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 0.45 \text{ seg}$$
$$M_p = e^{\frac{-\pi \cdot \sigma}{\omega_d}} = 54.85\%$$

Estas características temporales se pueden observar en la figura 3.8. La figura 3.9 presenta la respuesta del sistema frente una entrada tipo rampa.

En conclusión, se puede decir:

- A medida que aumenta la ganancia del control proporcional el error estacionario ante una entrada de tipo rampa disminuye.

- En sistemas que poseen una diferencia entre el grado del denominador y el numerador de su función de transferencia mayor que dos (poseen por lo menos dos polos más que el número de ceros), que son la gran mayoría de los sistemas, el aumento de la ganancia del control

proporcional conlleva, generalmente, un empeoramiento de la respuesta transitoria del sistema en lazo cerrado:

- Aumento del sobreimpulso.
- Disminución del tiempo de pico.
- Aumento del tiempo de establecimiento.

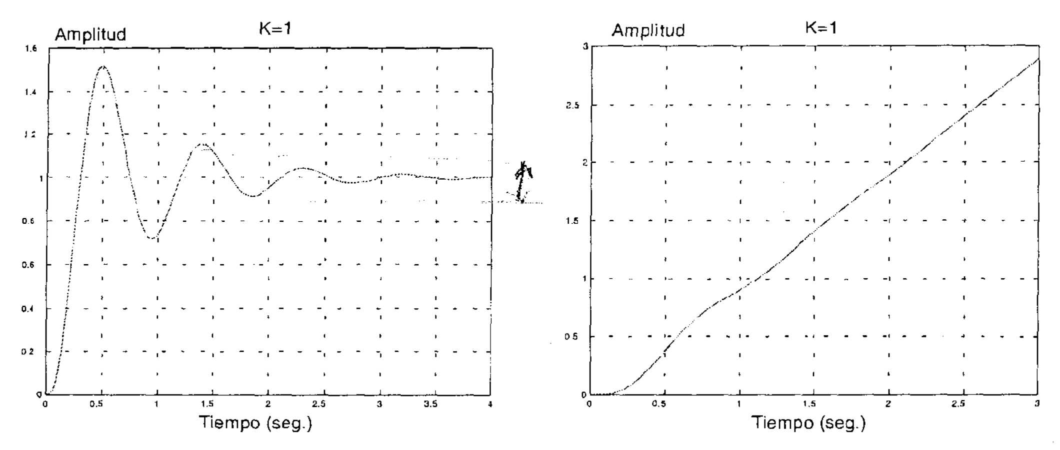


Fig. 3.8 Respuesta al escalón. *Fig. 3.9 Respuesta a la rampa.*

De este modo, se puede llegar a la situación de llevar al sistema a la inestabilidad mediante un aumento excesivo de la ganancia del control proporcional. Estas conclusiones están acordes con las posiciones de los polos dominantes en el lugar geométrico de las raíces, debido a que los polos dominantes en lazo cerrado se aproximan al eje imaginario $j\omega$. En concreto, para K=2.4 los polos en lazo cerrado del sistema se sitúan sobre el eje imaginario $j\omega$, lo que lleva al sistema a tener una respuesta oscilatoria presentada en la figura 3.10.

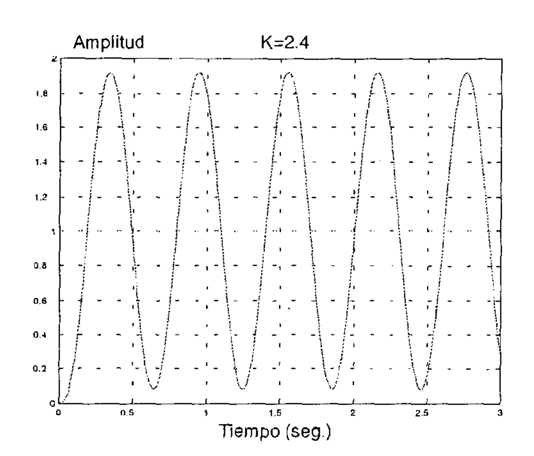


Fig. 3.10 Respuesta al escalón.

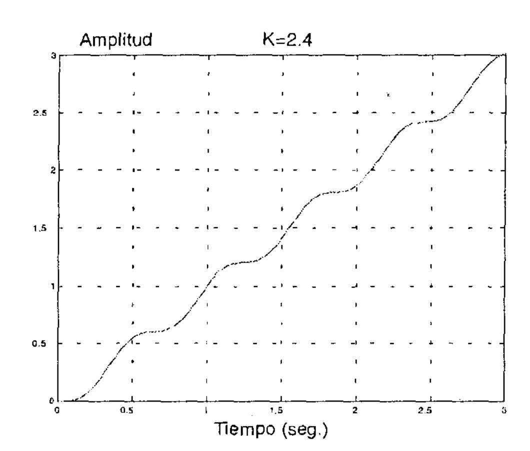


Fig. 3.11 Respuesta a la rampa.

De este modo, para escoger el valor adecuado de ganancia del control proporcional se tiene que realizar un compromiso con las indicaciones anteriores. En este caso, se puede escoger una K acorde con el error estacionario o bien escoger una K para obtener una buena respuesta transitoria.

3.3 Control proporcional integral

3.3.1 Acción de control integral

La acción de control integral genera una señal de control proporcional a la integral de la señal de error:

$$m(t) = ki \cdot \int_0^t e(t) \cdot dt \Rightarrow M(s) = \frac{ki}{s} \cdot E(s) \quad (CI = 0) \tag{3.4}$$

La característica más importante de este tipo de control es que la acción correctora se efectúa mediante la integral del error, ello permite decir que el control integral proporciona una señal de control que es función de la propia 'historia' de la señal de error, permitiendo obtener una señal de control diferente de cero aunque la señal de error sea cero.

e(t)=0 no implica m(t)=0, de hecho m(t)=cte. implica e(t)=0.

El control integral permite obtener error estacionario nulo en un sistema de control mediante la introducción de un elemento integrador en la función de transferencia de lazo abierto. La figura 3.12 muestra una gráfica típica de la señal de control y del error integral:

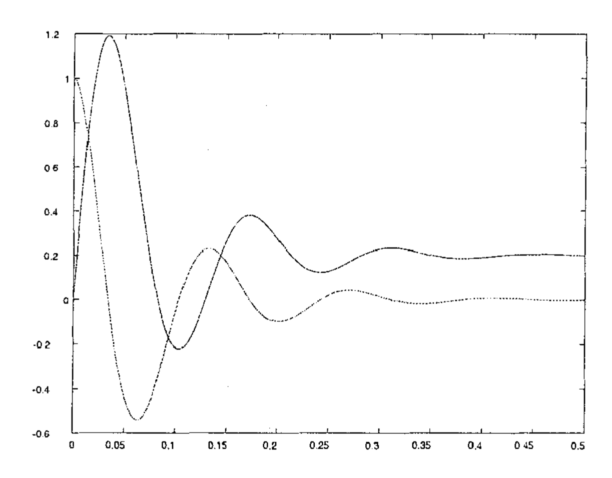


Fig. 3.12 Control integral. Señal de error y señal de control

Si se calcula el error en régimen estacionario ante una entrada al escalón, R(s)=1/s.

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + Gc(s) \cdot G(s) \cdot H(s)} \quad ; \; Kp = \lim_{s \to 0} Gc(s) \cdot G(s) \cdot H(s) \tag{3.5}$$

Si Gc(s) tiene un elemento integrador (polo en s=0) entonces $Kp \rightarrow \infty$ y $e_{ss} \rightarrow 0$.

Sin embargo, la acción de control integral empeora de un modo substancial la estabilidad relativa del sistema, aumentando el sobreimpulso de la respuesta transitoria, pudiéndose obtener, inclusive, un sistema inestable, debido a que al incorporar un polo en lazo abierto en el origen se desplaza el lugar geométrico de raíces del sistema hacia el semiplano derecho de S. Por esta razón, en la práctica, la acción integral suele acompañarse por otras acciones de control.

3.3.2 Acción de control proporcional integral

La acción de control proporcional integral (PI) genera una señal resultante de la combinación de la acción proporcional y la acción integral conjuntamente.

$$m(t) = k \cdot e(t) + ki\int_0^t e(t) \cdot dt = k \cdot \left[e(t) + \frac{1}{Ti} \cdot \int_0^t e(t) \cdot dt \right] \quad (3.6)$$

donde Ti es el *tiempo integral.*

$$TL/_{CI=0}: \qquad M(s) = k \cdot \left[1 + \frac{1}{Ti \cdot s}\right] \cdot E(s) \Rightarrow \frac{M(s)}{E(s)} = k \cdot \left[1 + \frac{1}{Ti \cdot s}\right] \quad (3.7)$$

La estructura en diagrama de bloques:

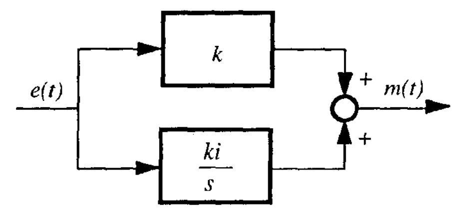
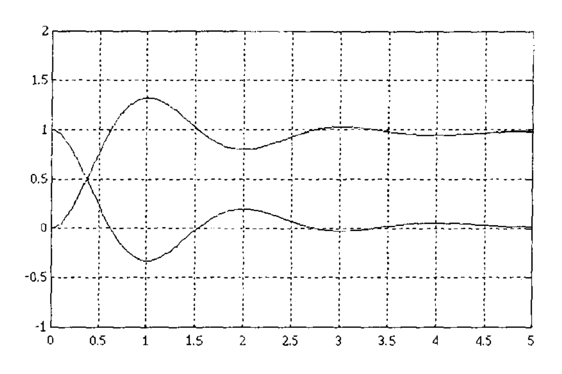
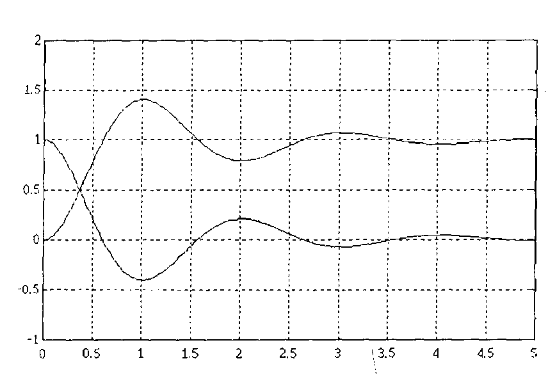


Fig. 3.13 Diagrama de bloques de la acción de control PI.





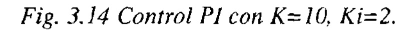


Fig. 3.14 Control PI con K=10, Ki=2.

Fig. 3.15 Control PI con K=10, Ki=4

El control proporci
la acción integral e
inestabilidad que c

En la figuras 3.14 y
integral.

Ejemplo 3.2

El sistema a control

donc

dc

La inclusión de un
a la función de tr
empeoramiento de
cero, de manera que

El modo de lograr
origen. De esta ma
anulará con el cero
una cancelación po
integral al sistema i

Un buen criterio de
pequeño posible r
ejemplo a=0.1. Té
limitaciones físicas

A continuación, se
ante una entrada de

El control proporcional integral combina las ventajas de la acción proporcional y de la acción integral; la acción integral elimina el error estacionario, mientras que la acción proporcional reduce el riesgo de inestabilidad que conlleva la introducción de la propia acción integral.

En la figuras 3.14 y 3.15 se observan las respuestas temporales de un sistema con control proporcional integral.

Ejemplo 3.2

El sistema a controlar se muestra en la figura 3.16:

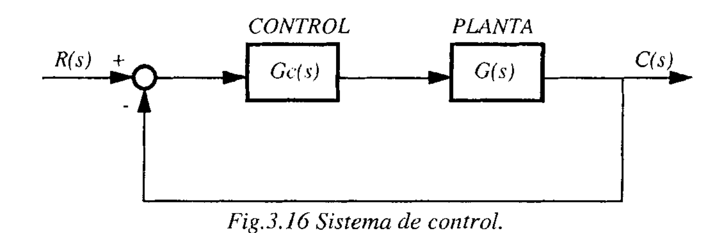


Fig.3.16 Sistema de control.

$$\text{donde: } G(s) = \frac{1080}{s\cdot(s+6)\cdot(s+18)}; \quad Gc(s) = k + \frac{ki}{s} = k\cdot\frac{s+\frac{ki}{k}}{s} = k\cdot\frac{s+a}{s}$$

$$\text{donde } a = \frac{ki}{k}$$

La inclusión de un control proporcional integral implica introducir un cero real y un polo en el origen a la función de transferencia en lazo abierto del sistema. La inclusión de este polo produce un empeoramiento de la respuesta transitoria, para evitarlo se diseñará el proporcional integral, fijando el cero, de manera que se mantenga lo máximo posible el comportamiento del sistema inicial.

El modo de lograr este objetivo es situar el cero del proporcional integral lo más cercano posible al origen. De esta manera el polo en lazo cerrado originado por el aumento de orden del sistema se anulará con el cero del proporcional integral, que es un cero en lazo cerrado del sistema, efectuándose una cancelación polo-cero. Pudiéndose, entonces, aproximar el sistema controlado por el proporcional integral al sistema inicial con control proporcional.

Un buen criterio de diseño para fijar el cero del proporcional integral, es decir ‘a’, es tomarlo lo más pequeño posible respecto al polo dominante de la función de transferencia de lazo abierto. Por ejemplo a=0.1. Téngase en cuenta que el valor más pequeño de ‘a’ posible vendrá dado por las limitaciones físicas a la hora de la realización práctica del control.

A continuación, se obtiene el lugar geométrico de raíces del sistema, la respuesta temporal del sistema ante una entrada de tipo escalón y un entrada de tipo rampa para dos valores de k (figuras 3.17-3.22).

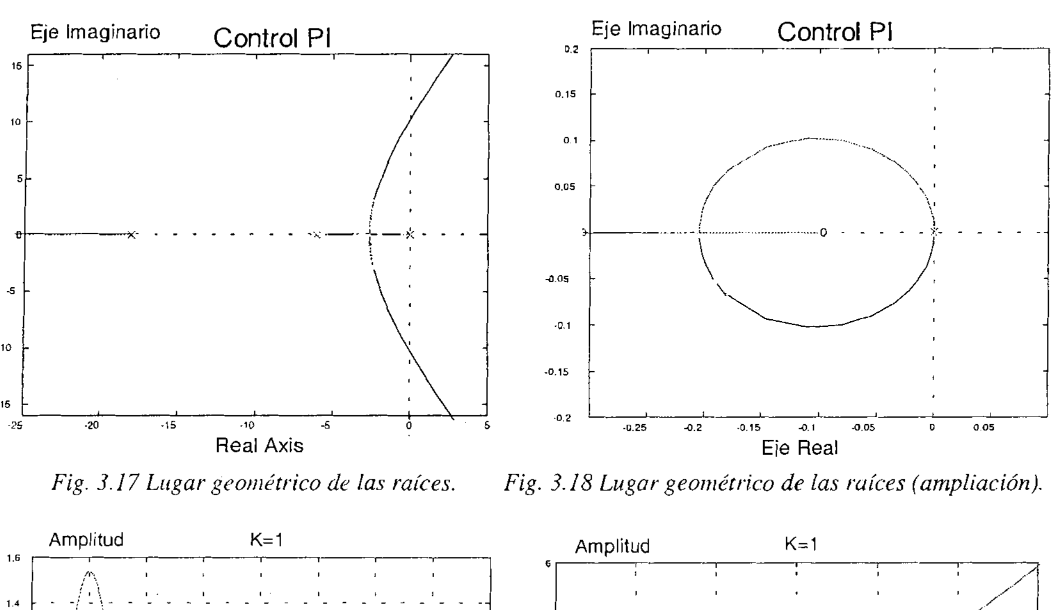


Fig. 3.17 Lugar geométrico de las raíces. *Fig. 3.18 Lugar geométrico de las raíces (ampliación).*

Fig. 3.19 Respuesta al escalón (k=1). *Fig.3.20 Respuesta a la rampa (k=1).*

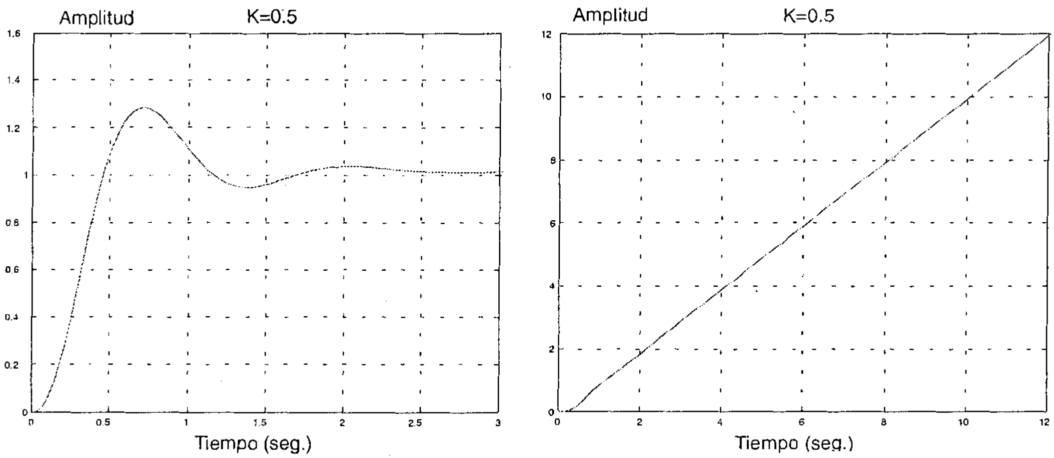


Fig. 3.21 Respuesta al escalón (k=0.5). *Fig. 3.22 Respuesta a la rampa (k=0.5).*

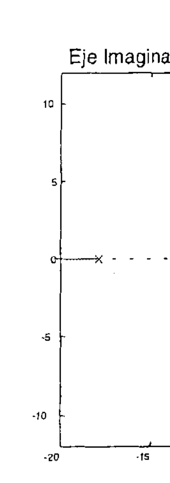


Fig. 3.23

Si se compara
control proporc
k, dado que s
mantenga el mi
estacionario co
elección de k s

En el caso de
se obtiene un s
temporal ante

3.4 Control

3.4.1 Acción

La acción de c
error:

De este mod
características
señal de error
de control deri
Sin embargo,
una señal de er

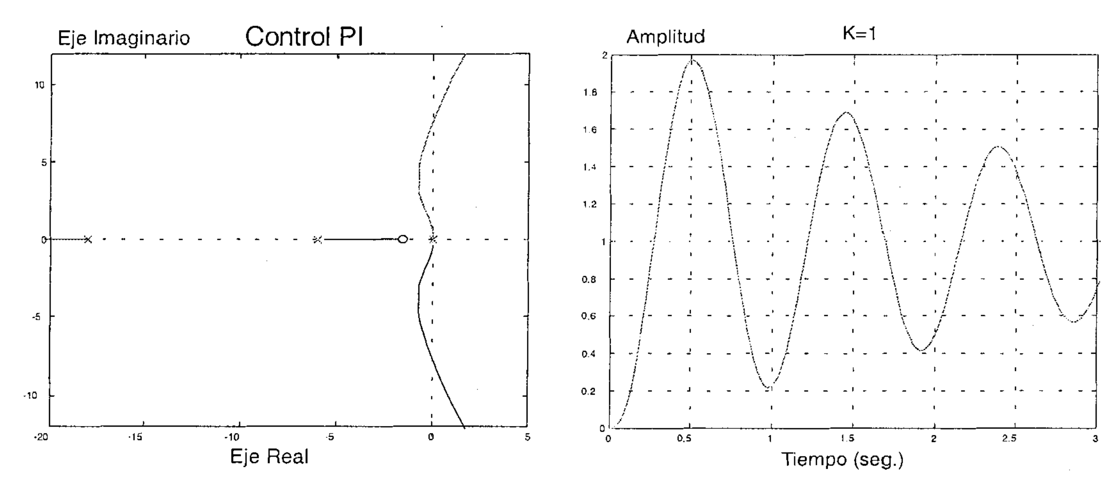


Fig. 3.23 Lugar geométrico de las raíces (a=2).

Fig. 3.24 Respuesta al escalón (a=2).

Si se compara esta respuesta del sistema ante una entrada de tipo escalón con la obtenida con el control proporcional (P), se observa que ambas respuestas son aproximadamente iguales para la misma k, dado que se produce una cancelación polo-cero en lazo cerrado, provocando que el sistema mantenga el mismo orden. Para la entrada de tipo rampa se observa que se elimina el error de régimen estacionario con el control proporcional integral. Por último, debe indicarse que a la hora de la elección de k se deberá tener en cuenta las especificaciones transitorias y escoger la k más idónea.

En el caso de escoger el cero del controlador proporcional integral alejado del polo del origen (a=2), se obtiene un sistema con ramas del LGR desplazadas hacia la derecha, fig. 3.23, por tanto la respuesta temporal ante una entrada de tipo escalón empeora, tal como se comprueba en la figura 3.24.

3.4 Control proporcional derivativo

3.4.1 Acción de control derivativa

La acción de control derivativa genera una señal de control proporcional a la derivada de la señal de error:

$$m(t) = kd \cdot \frac{de(t)}{dt} \Rightarrow M(s) = kd \cdot s \cdot E(s) \qquad (3.8)$$

De este modo, el control derivativo mediante la derivada de la señal de error 'conoce' sus características dinámicas (crecimiento o decrecimiento), produciendo una corrección antes de que la señal de error sea excesiva. A este efecto se le denomina *acción anticipativa*. Resumiendo, la acción de control derivativa añade sensibilidad al sistema y tiene un efecto de aumento de estabilidad relativa. Sin embargo, el control derivativo no puede utilizarse en solitario porque es incapaz de responder a una señal de error constante.

$$e(t) = cte. \Rightarrow m(t) = 0$$

En conclusión, con un control derivativo un sistema no alcanzaría nunca el estado estacionario. *El control derivativo siempre debe utilizarse en combinación con otros controles* por su influencia estabilizadora mediante la acción anticipativa.

3.4.2 Acción de control proporcional derivativa

La acción de control proporcional derivativa (PD) genera una señal que es resultado de la combinación de la acción proporcional y la acción derivativa conjuntamente.

$$m(t) = k \cdot e(t) + kd \cdot \frac{de(t)}{dt} = k \cdot \left[e(t) + Td \cdot \frac{de(t)}{dt} \right] \tag{3.9}$$

donde Td es el *tiempo derivativo.*

$$TL\!\!\diagup_{CI=0}: \qquad M(s) = k \cdot (1 + Td \cdot s) \cdot E(s) \Rightarrow \frac{M(s)}{E(s)} = k \cdot (1 + Td \cdot s) \tag{3.10}$$

La estructura en diagrama de bloques:

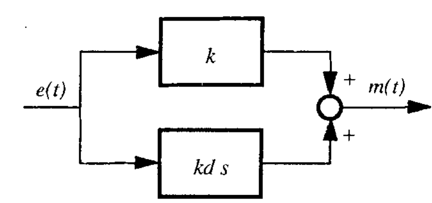


Fig. 3.25 Diagrama de bloques del control PD.

El control proporcional derivativo proporciona al sistema una mayor estabilidad relativa que se traduce en una respuesta transitoria con menor sobreimpulso. Sin embargo, cuando la influencia del control es muy grande, el sistema de control tiende a ofrecer una respuesta excesivamente lenta.

Existen dos posibles métodos de diseño, según se priorice el cumplimiento de las condiciones de régimen estacionario o transitorio en las respuestas temporales. El primer método obtiene una determinada respuesta temporal transitoria, quedando el régimen estacionario de la respuesta temporal en función del diseño realizado. El segundo método fija una determinada respuesta temporal en régimen permanente, quedando las condiciones de régimen temporal transitorio en función del diseño realizado. A continuación se expondrán dichos métodos mediante un ejemplo demostrativo.

Ejemplo 3.3

Primer método. El sistema a controlar se muestra en la figura 3.26.

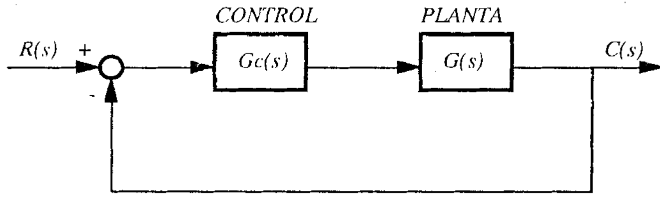


Fig 3.26 Sistema de control.

$$\text{Donde } G(s) = \frac{1080}{s \cdot (s+6) \cdot (s+18)} \quad ; \quad Gc(s) = k \cdot (1 + Td \cdot s) = kd(s+a)$$

$$\text{donde } kd = k \cdot Td \quad y \quad a = \frac{1}{Td}$$

Se impone al sistema unas especificaciones de respuesta temporal transitoria de:

$$ts = 1 \text{ segundo y } Mp = 10\%.$$

Para cumplir dichas especificaciones los polos dominantes del sistema en lazo cerrado deben estar situados en:

$$ts = \frac{4}{\sigma} \Rightarrow \sigma = 4$$

$$Mp = e^{-\frac{\pi \cdot \sigma}{\omega d}} \Rightarrow \omega d = 5.458$$

$$s_{1,2} = -4 \pm 5.458 \cdot j$$

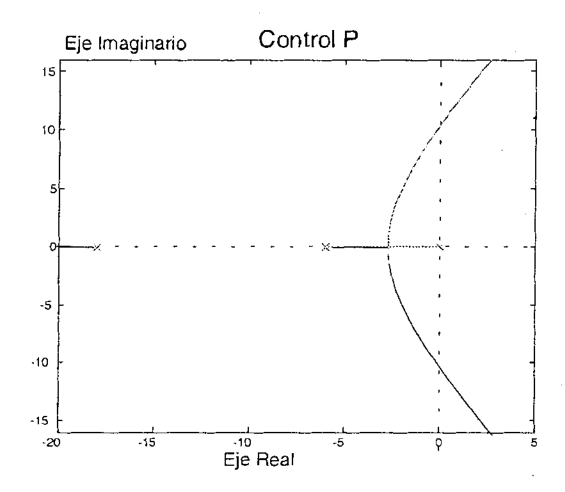


Fig. 3.27 Lugar geométrico de las raíces.

Dibujando el LGR del sistema, fig. 3.27, se puede observar que el sistema con un control proporcional no conseguirá las especificaciones de respuestas transitorias anterior, ya que ninguna rama del LGR pasa por el punto $s_{1,2} = -4 \pm 5.458 \cdot j$.

Para lograr que el punto $s_{1,2} = -4 \pm 5.458 \cdot j$ pertenezca al LGR. se añade un control proporcional derivativo (PD), introduciendo el cero del control en una posición desde la cual sea capaz de atraer las ramas del LGR. hacia la izquierda, de manera que el punto $s_{1,2} = -4 \pm 5.458 \cdot j$ pertenezca al LGR.

Para fijar la posición del cero se impone la condición de ángulo, fig. 3.28:

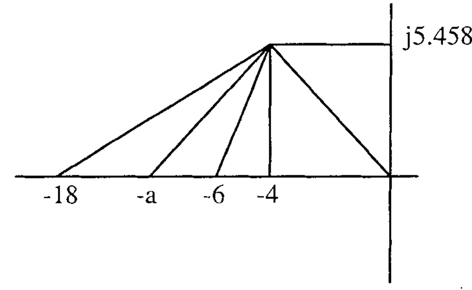


Fig. 3.28 Trazado para la aplicación de la condición de ángulo.

$$\text{arctg}\frac{5.458}{a-4} - \text{arctg}\frac{5.458}{18-4} - \text{arctg}\frac{5.458}{6-4} - 180 + \text{arctg}\frac{5.458}{4} = \pm 180; \qquad \text{de donde: } a=11.136$$

Con esta posición del cero los polos de lazo cerrado del sistema se sitúan en $s_{1,2} = -4 \pm 5.458 \cdot j$. Ahora se debe calcular el valor de la ganancia kd en dicho punto. Para ello se aplica la condición de módulo.

$$kd \cdot 1080 \cdot \frac{\sqrt{5.458^2 + (11.136-4)^2}}{\sqrt{5.458^2 + 4^2} \cdot \sqrt{5.458^2 + (6-4)^2} \cdot \sqrt{5.458^2 + (18-4)^2}} = 1; \quad kd \cdot \frac{8.985 \cdot 1080}{15.026 \cdot 5.812 \cdot 6.766} = 1$$

$$kd = 0.0609$$

Para comprobar el diseño se puede dibujar el LGR. del sistema con control proporcional derivativo, obteniendo el resultado que se muestra en la figura 3.29.

Se puede ver en la figura 3.29 que, efectivamente, para los valores de a y kd calculados se logra que los polos en lazo cerrado se sitúen en las posiciones deseadas. Por tanto, se cumplen las condiciones de respuesta temporal transitoria, pero se debe comprobar si el error estacionario es menor o igual que el deseado.

Cálculo del error

Evidentemente, r
integrador en la
respuestas tempo

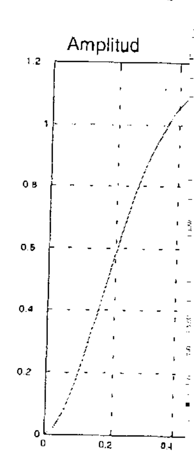


Fig.

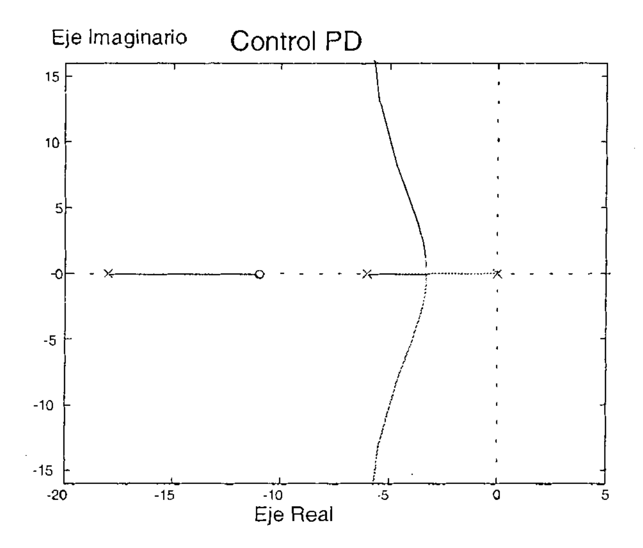


Fig. 3.29 Lugar geométrico de las raíces.

Cálculo del error estacionario:

$$Kv = \lim_{s \to 0} s \cdot G(s) \cdot Gc(s) = 10 \cdot kd \cdot a = 6.7834$$

$$essv = \frac{1}{Kv} = 14.74\%$$

Evidentemente, no se ha logrado un essv=0 ya que para ello se necesita introducir un nuevo elemento integrador en la función de transferencia en lazo abierto. En las figuras 3.30 y 3.31 se observan las respuestas temporales del sistema diseñado frente a una entrada tipo escalón y una entrada tipo rampa.

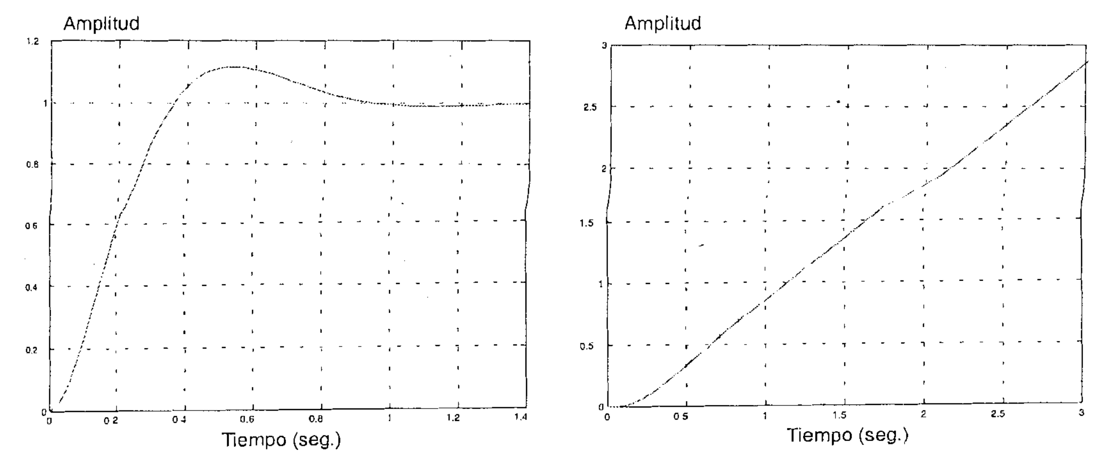


Fig. 3.30 Respuesta al escalón. *Fig. 3.31 Respuesta a la rampa.*

• Limitaciones en la utilización del control proporcional derivativo.

Supóngase que se desee imponer al mismo sistema una respuesta transitoria con el mismo sobreimpulso pero con un tiempo de establecimiento de 0.4 seg. Para ello, son necesarios unos polos dominantes en lazo cerrado en la posición $s_{1,2} = -10 \pm 13.643 \cdot j$.

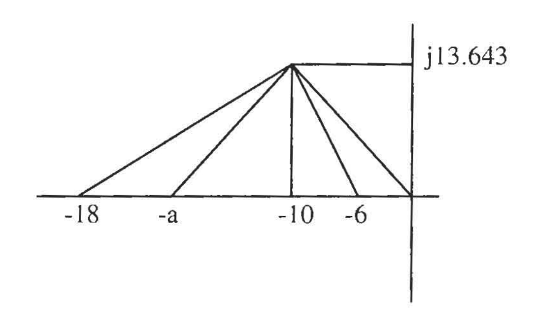


Fig. 3.32 Trazado para la aplicación de la condición de ángulo.

Si ahora se aplica la condición de ángulo, fig. 3.32, para hallar la posición necesaria del cero del proporcional derivativo, para situar los polos en lazo cerrado en $s_{1,2} = -10 \pm 13.643 \cdot j$.

$$\operatorname{arctg}\frac{13.643}{a-10} - \operatorname{arctg}\frac{13.643}{18-10} - 180 + \operatorname{arctg}\frac{13.643}{10-6} - 180 + \operatorname{arctg}\frac{13.643}{10} = \pm 180; \qquad a = 4.4324$$

Aplicando la condición de módulo se obtienen estos polos en lazo cerrado para kd=0.2388.

En la figura 3.33 se puede observar el LGR. del sistema con el control proporcional derivativo diseñado.

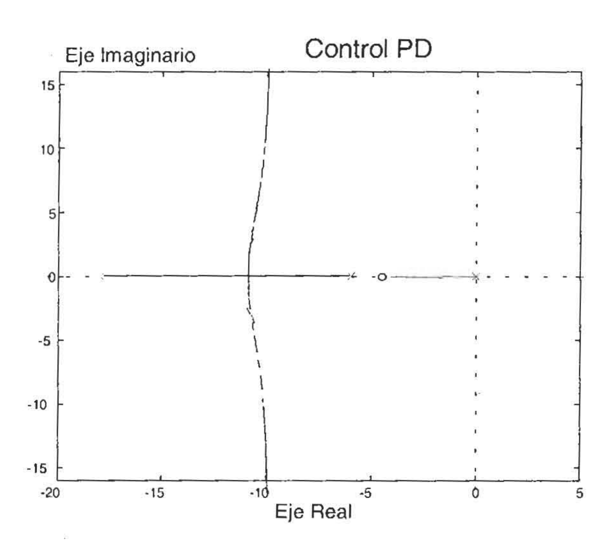
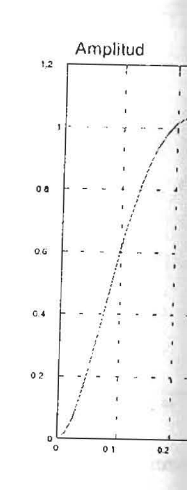


Fig. 3.33 Lugar geométrico de las raíces.

Observando el LGR. se observa como en principio no se puede hablar de polos dominantes, ya que existe un polo real en lazo cerrado entre el origen y "a".

En las figuras 3.34 y 3.35 se presentan las respuestas temporales ante una entrada de tipo escalón del sistema con control proporcional derivativo con dos ganancias distintas (kd=0.2388 y kd=0.0609).



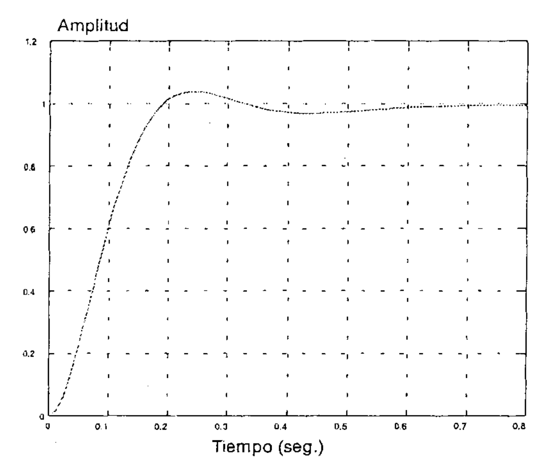


Fig. 3.34 Respuesta al escalón para kd=0.2388.

Fig. 3.35 Respuesta al escalón para kd=0.0609.

Conclusiones:

- Para el valor de ganancia diseñado, la respuesta transitoria es la esperada. Ello es posible debido a que para esta ganancia se está acentuando el efecto de cancelación polo-cero en lazo cerrado.

- Para el otro valor de ganancia, el polo dominante es el real, que debido a su pequeño valor en módulo provoca que la respuesta sea lenta.

Las diferencias de valor de las ganancias de estos dos casos no son muy significativas, por ello, a pesar de lograr diseños adecuados, se recomienda no situar el cero del control proporcional derivativo en esta zona, a no ser que se posean herramientas de simulación para hacer una valoración.

Si los requerimientos son mas exigentes se acabaría teniendo el cero del control proporcional derivativo en el semiplano derecho, de modo que aparecería un polo en lazo cerrado en el semiplano derecho, creando un sistema inestable; por ejemplo, si se imponen las especificaciones:

$$ts = 0.2seg \Rightarrow \sigma = 20$$
$$Mp = 10\% \Rightarrow \omega d = 27.287$$

los polos dominantes deberán estar en $s_{1,2} = -20 \pm 27.287 \cdot j$, y aplicando la condición de ángulo se obtendría el cero del proporcional derivativo en a=-22, provocando la aparición de un polo en lazo cerrado en el semiplano derecho, ocasionando que el sistema sea inestable. En las gráficas siguientes se puede observar el LGR. del sistema con el control proporcional derivativo, fig. 3.36a, y la respuesta temporal ante una entrada de tipo escalón, fig. 3.36b.

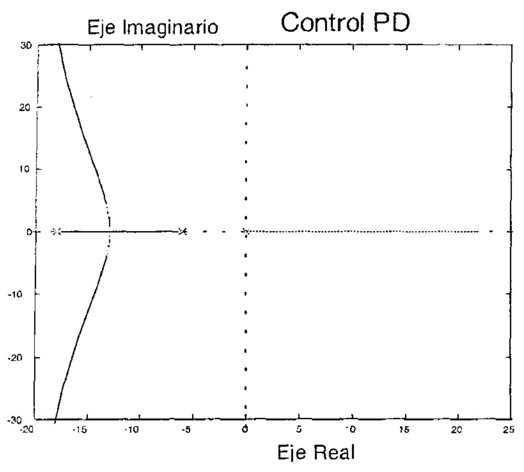


Fig. 3.36a Lugar geométrico de las raíces.

Fig. 3.36b Respuesta al escalón.

Segundo método: Otra manera de diseñar un control proporcional derivativo es fijando primero la ganancia para asegurar un error estacionario. Por ejemplo, utilizando el mismo sistema del método 1 donde se le impone, a priori, un error en régimen estacionario ante una entrada de tipo rampa. Obsérvese que la acción derivativa no afecta al estado estacionario.

$$e_{ssv} = 14.74\% \Rightarrow Kv = \frac{1}{0.147} K$$

$$Kv = \lim_{s \to 0} s \cdot G(s) \cdot Gc(s) \Rightarrow K = 0.678$$

Ahora resta fijar un único grado de libertad que es la posición del cero del proporcional derivativo. Para ello, se puede dibujar el LGR del sistema en función de la posición del cero del proporcional derivativo. De esta manera se conocerán todos los posibles valores en donde se pueden situar los polos en lazo cerrado del sistema para el valor de K prefijado (que permite obtener el error en régimen estacionario preestablecido).

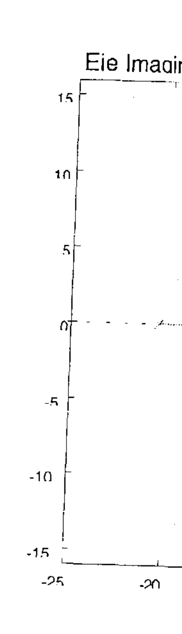
A partir de la ecuación característica del sistema:

$$\frac{1080 \cdot (K + Kd \cdot s)}{s \cdot (s+6) \cdot (s+18)} + 1 = 0$$

se puede transformar como:

$$\frac{1080 \cdot Kd \cdot s}{s^3 + 24 \cdot s^2 + 108 \cdot s + 732.7} + 1 = 0$$

de donde se puede dibujar el siguiente LGR., fig. 3.37, en función de Kd, es decir, la posición del cero.



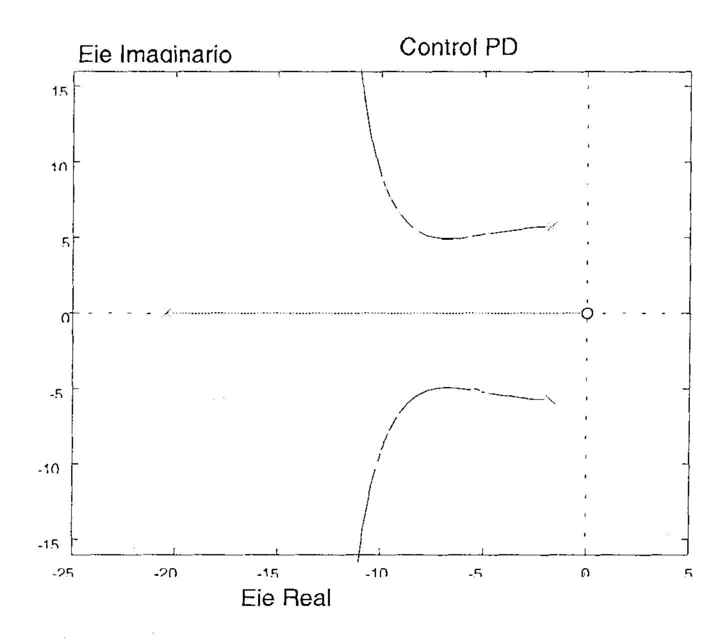


Fig.3.37 Lugar geométrico de las raíces.

Sobre este LGR. se pueden imponer unas condiciones de respuesta transitoria y analizar si son alcanzables.

Si se impone Mp=10% y ts=1seg, esto es , que los polos dominantes en lazo cerrado estén en $s_{1,2} = -4 \pm 5.458 \cdot j$. Analizando el LGR se observa que dicho punto pertenece al LGR. Para comprobarlo de manera analítica se aplicaría la condición de ángulo. Aplicando la condición de módulo en dicho punto se encontraría el valor de Kd= 0.0609. Este resultado era previsible, ya que se ha impuesto como condición de error en régimen estacionario el resultado obtenido en el método 1.

Sin embargo, si se quisiera Mp=10% y ts=0.4 seg, lo cual implica polos dominantes en $s_{1,2} = -10 \pm 13.643 \cdot j$, se encontraría que esta posición no pertenece al LGR.

Conclusiones:

- Este método se utiliza cuando lo mas importante a garantizar es la exactitud estacionaria. Posteriormente, se encuentra una Kd, que determina la posición del cero introducido por el control proporcional derivativo, para una condición de respuesta transitoria determinada.

- En el LGR en función de Kd, se observa la evolución de los polos en lazo cerrado para una ganancia K fija en función de la evolución del cero del proporcional derivativo, es decir de Kd. Según este LGR., para un error estacionario fijo (K fijo), en general el control proporcional derivativo no permite imponer cualquier respuesta temporal. Por ejemplo, en el caso anterior hay limitaciones con respecto al máximo sobreimpulso que se puede conseguir y además no se puede lograr tiempo de establecimiento inferior a 0.33 seg. para una respuesta a una entrada de tipo escalón, y ello siempre que se pueda aplicar polos dominantes.

Ejemplo 3.4

Dado el sistema realimentado de la figura 3.38:

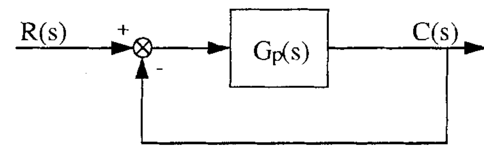


Fig. 3.38 Sistema de control.

$$\text{donde:} \quad G_p(s) = \frac{k}{s \cdot (s+2) \cdot (s+7)^2}$$

Se desea diseñar un sistema que verifique las siguientes especificaciones:

1. Tiempo de pico menor o igual a 1 segundo.

2. Máximo sobreimpulso menor o igual a 5 %.

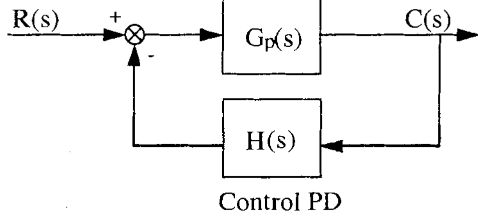
Para realizar dicho diseño se proponen los siguientes pasos:

a) Representar en el plano S las zonas en las cuales se cumplen ambas especificaciones presuponiendo cararacterización dinámica de un sistema de segundo orden subamortiguado.

b) Dibujar el lugar geométrico de las raíces del sistema.

c) Razonar por qué el sistema en lazo cerrado no puede cumplir la primera especificación.

Para cumplir las especificaciones se introduce un control proporcional derivativo en el sistema como muestra la figura 3.39:



Control PD

Fig. 3.39 Sistema de control.

$$\text{donde:} \quad G_p(s) = \frac{k}{s \cdot (s+2) \cdot (s+7)^2}; \quad H(s) = s + a$$

Se desea hallar el

d) El valor de los respuesta transito segundo.

e) Hallar el valor valor de k se logra

Solución:

a) Zonas del plano sistema:

tp = 1 seg

Mp = 5% ⇒ e

cos ϕ

Gráficamente, el re es la zona intersec plano S como se ob

b) Trazado del luga

* LGR sob conclusión, que úni

* Asíntotas

Se desea hallar el valor de "a" para lograr cumplir las especificaciones anteriores. Para ello, calcular:

d) El valor de los polos en lazo cerrado tales que, considerando aproximación por polos dominantes, la respuesta transitoria al escalón presente un máximo sobreimpulso del 5 % y un tiempo de pico de 1 segundo.

e) Hallar el valor de "a" para conseguir los polos en lazo cerrado del apartado anterior. ¿Para qué valor de k se logran dichos polos?.

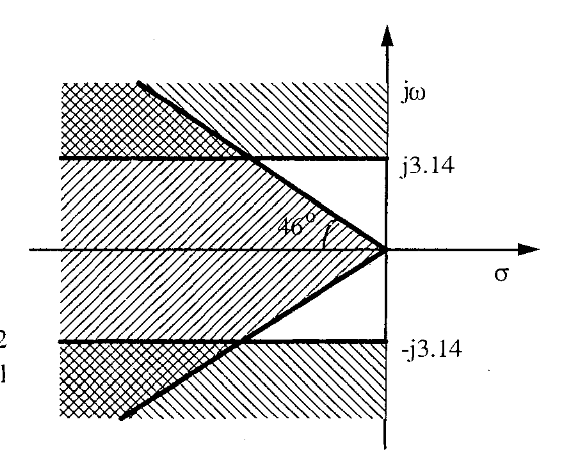
Solución:

a) Zonas del plano S en las que deberían encontrarse los polos complejo-conjugados dominantes del sistema:

$$tp = 1 \text{ seg} \Rightarrow tp = \frac{\pi}{\omega d} \Rightarrow \omega d = 3.14$$

$$Mp = 5\% \Rightarrow e^{-\pi\cdot\xi/\sqrt{1-\xi^2}} = 0.05 \Rightarrow \xi = 0.69$$

$$\cos\phi = \xi \Rightarrow \phi = 46.36^{\circ}$$



Gráficamente, el resultado de las condiciones 1 y 2 es la zona intersección entre las zonas rayadas en el plano S como se observa en la figura 3.40.

Fig. 3.40 Condiciones 1 y 2 trazadas en el plano S.

b) Trazado del lugar geométrico de las raíces:

* LGR sobre eje real: El análisis de este apartado de construcción del LGR conlleva, como conclusión, que únicamente pertenece al LGR sobre eje real la zona comprendida entre s=0 y s=-2.

* Asíntotas:

$$\phi = \frac{\pm 180^{\circ}\cdot(2\lambda+1)}{n-m} = \frac{\pm 180^{\circ}\cdot(2\lambda+1)}{4} = \begin{cases} \pm 45^{\circ} \\ \pm 135^{\circ} \end{cases}$$

* Puntos de intersección de las asíntotas con el eje real:

$$\sigma = \frac{\sum p - \sum z}{n - m} = \frac{-7-7-2}{4} = -4$$

* Puntos de ruptura:

$$1 + \frac{k}{s\cdot(s+2)\cdot(s+7)^2} = 0 \Rightarrow k = -s\cdot(s+2)\cdot(s+7)^2$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow 2\cdot s^2 + 10\cdot s + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s1 = -0.841 \in \text{LGR} \\ s2 = -4.1583 \notin \text{LGR} \end{cases}$$

El valor de k para el punto que pertenece al lugar geométrico de las raíces es:

$k = -s\cdot(s+2)\cdot(s+7)^2\Big|_{s=-0.841} = 36.97 > 0$ luego s=-0.841 es un punto de ruptura.

* Punto de cruce con el eje imaginario:

$$\frac{k}{s\cdot(s+2)\cdot(s+7)^2} = -1 \Rightarrow s^4 + 16\cdot s^3 + 77\cdot s^2 + 98\cdot s + k = 0$$

Algoritmo de Routh:

$$\left\langle \begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 77 & k \\ s^3 & 16 & 98 & \\ s^2 & 70.875 & k & \\ s^1 & \dfrac{70.875\cdot 98 - 16\cdot k}{70.875} & & \\ s^0 & k & & \end{array} \right\rangle$$

Anulando las filas:

$$k = 0; \quad \frac{70.875\cdot 98 - 16\cdot k}{70.875} = 0 \Rightarrow k = 434.109$$

El polinomio auxiltiar es:

$$Pa(s) = 70.875\cdot s^2 + k\Big|_{k=434.1} = 70.875\cdot s^2 + 434.1 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j2.475$$

En la figura 3.41 puede observarse el lugar geométrico resultante de este sistema.

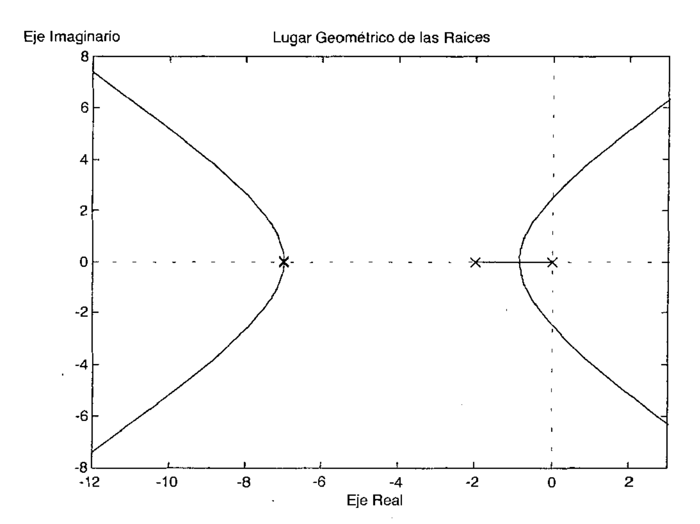


Fig. 3.41 Lugar geométrico de las raíces.

c) El sistema no puede cumplir la primera especificación (tiempo de pico) porque para ello la parte imaginaria de los polos dominantes debería ser mayor o igual a 3.14 y como máximo se alcanza el valor de 2.475 en el límite de estabilidad.

d) Para lograr verificar las especificaciones requeridas se diseñará un control proporcional derivativo según la topología que muestra la figura 3.39. Previamente se debe calcular el valor de los polos en lazo cerrado dominantes que proporcionarían una respuesta transitoria al escalón con características de Mp=5 % y tp=1 seg. Recordando los resultados anteriores:

$$t_p = 1 \text{ seg} \Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \Rightarrow \omega_d = 3.14$$

$$M_p = 5\% \Rightarrow e^{-\pi \cdot \xi / \sqrt{1-\xi^2}} = 0.05 \Rightarrow \xi = 0.69$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{3.14}{\sqrt{1-0.69^2}} = 4.33; \quad \sigma = \xi \cdot \omega_n = 0.69 \cdot 4.33 \cong 3$$

En conclusión las raíces deseadas son: $s_{1,2} = -3 \pm j3.14$

e) Para que las raíces deseadas sean polos en lazo cerrado, es necesario cumplir las condiciones de ángulo (pertenencia al lugar geométrico de las raíces) y módulo. La aplicación de estas condiciones proporcionará los valores apropiados de control introducido.

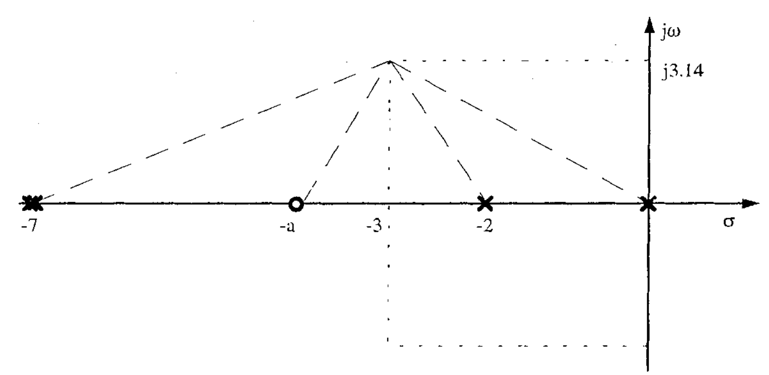


Fig. 3.42 Trazado para imponer la condición de ángulo.

Condición de ángulo, fig. 3.42:

$$\operatorname{arctg}\frac{3.14}{a-3} - 2\cdot\operatorname{arctg}\frac{3.14}{7-3} - 180^{o} + \operatorname{arctg}\frac{3.14}{3-2} - 180^{o} + \operatorname{arctg}\frac{3.14}{3} = \pm 180^{o} \Rightarrow a = -0.441$$

Observando el resultado obtenido en el diseño, el control proporcional derivativo introduce un cero en semiplano derecho en el plano S; el cual, analizando el lugar geométrico de las raíces resultante, conllevará la existencia de un polo en lazo cerrado en semiplano derecho; obteniéndose, en consecuencia, un sistema inestable en lazo cerrado. Las especificaciones sobre este sistema son excesivamente restrictivas para poder lograrlas con un control proporcional derivativo exclusivamente, requiriéndose realizar alguna acción de control adicional.

3.5 Control proporcional integral derivativo

La acción de control proporcional integral derivativa (PID) genera una señal resultado de la combinación de la acción proporcional, la acción integral y la derivativa conjuntamente.

$$m(t) = k\cdot e(t) + kd\cdot\frac{de(t)}{dt} + ki\int_0^t e(t)\cdot dt = k\cdot\left[1 + Td\cdot\frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{Ti}\cdot\int_0^t e(t)\cdot dt\right] \qquad (3.11)$$

$$TL/_{CI=0}: \quad M(s) = k\cdot\left[1 + Td\cdot s + \frac{1}{Ti\cdot s}\right]\cdot E(s) \Rightarrow \frac{M(s)}{E(s)} = k\cdot\left[1 + Td\cdot s + \frac{1}{Ti\cdot s}\right] \qquad (3.12)$$

La estructura en diagrama de bloques se muestra en la figura 3.43.

La acción de control proporcional integral derivativa permite eliminar el error en estado estacionario, logrando una buena estabilidad relativa del sistema de control. La mejora de estabilidad relativa implica una respuesta transitoria con tiempos de adquisición y un valor de máximo sobreimpulso pequeños.

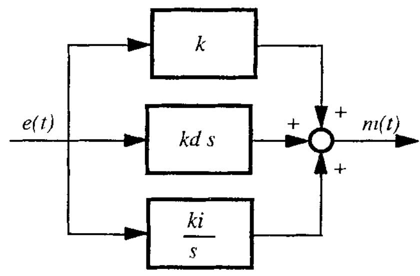


Fig. 3.43 Diagrama de bloques de un control PID.

El diseño de un control PID se realiza diseñando primero el control proporcional derivativo para cumplir las condiciones de respuesta transitoria y, posteriormente, se añadiendo el control proporcional integral obtenido tal como se ha visto anteriormente, de manera que su incorporación al sistema no afecte a la respuesta transitoria del sistema, pero sí elimine el error estacionario.

Ejemplo 3.5

El sistema a controlar se muestra en la figura 3.44:

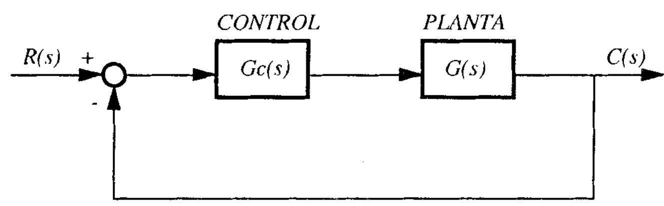


Fig. 3.44 Sistema de control.

$$\text{Donde : } G(s) = \frac{1080}{s\cdot(s+6)\cdot(s+18)} \quad ; \quad Gc(s) = k\cdot\left(1 + Td\cdot s + \frac{1}{Ti\cdot s}\right) = kd\,\frac{(s+a)\cdot(s+b)}{s}$$

$$\text{donde } kd = k\cdot Td; \quad a = \frac{1}{Td}; \quad b = \frac{1}{Ti}$$

Imponiendo las condiciones de respuesta transitoria de: Mp=10% y ts= 1seg.

Se llega al diseño de los controles proporcional derivativo y proporcional integral realizados anteriormente

$$Gc(s) = 0.0609\cdot\frac{(s+11.136)\cdot(s+0.1)}{s}$$

En las figuras siguientes puede verse el LGR, fig. 3.45, del sistema con el control PID diseñado, así como las respuestas temporales ante entradas de tipo escalón, fig. 3.46, y rampa, fig. 3.47.

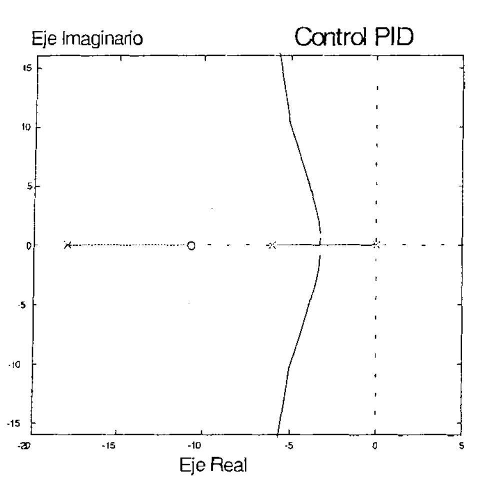


Fig. 3.45 Lugar geométrico de las raíces.

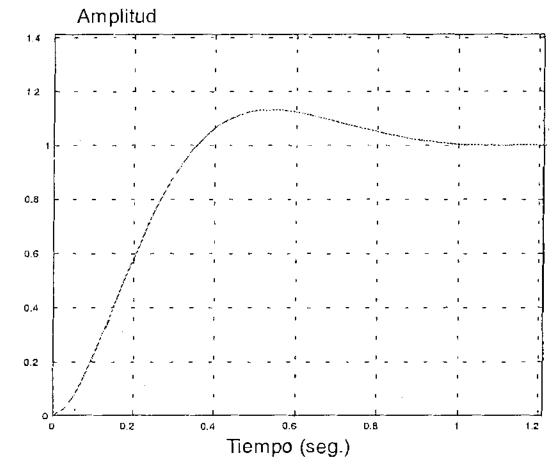


Fig. 3.46 Respuesta al escalón.

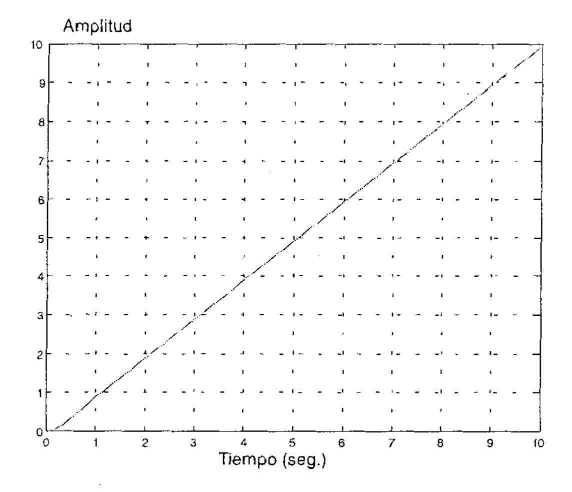


Fig. 3.47 Respuesta a la rampa.

Ejemplo 3.6

Dado el sistema realimentado de la figura 3.48:

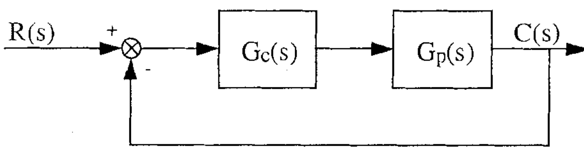


Fig. 3.48 Sistema de control.

$$\text{donde:}\quad G_p(s) = \frac{50}{(s+2)\cdot(s+3)};\quad G_c(s) = \text{Control}$$

Se desea diseña

1. Erro

2. Erro

3. Máx

4. Tien

Para realizar est

a) Comprobar q

b) Para hacer cu

Calcular k para
cumple la condic

c) Introducir un

Fijar el cero del
geométrico de la
cumple la condic

d) Introducir un

Se fija uno de los
condiciones 3 y
este valor de k cc

Solución:

a) Determinación

Se desea diseñar un sistema que verifique las siguientes especificaciones:

1. Error estacionario al escalón nulo.
2. Error estacionario a la rampa del 24 %.
3. Máximo sobreimpulso del 14 %.
4. Tiempo de establecimiento de 2 segundos.

Para realizar este diseño se proponen los siguientes pasos:

a) Comprobar que para $Gc(s) = 1$ no se cumple la condición de error estacionario al escalón.

b) Para hacer cumplir las condiciones de errores estacionarios se introduce un control integral:

$$Gc(s) = \frac{k}{s}$$

Calcular k para cumplir dichos errores y comprobar mediante el lugar geométrico de las raíces si se cumple la condición 4.

c) Introducir un control proporcional integrativo.

$$Gc(s) = \frac{k \cdot (1 + Ti \cdot s)}{s}$$

Fijar el cero del control de manera que se cumpla la condición 4 y comprobar, mediante el lugar geométrico de las raíces, que para el valor de k que verifica las condiciones de error estacionario no se cumple la condición 3.

d) Introducir un control proporcional integral derivativo.

$$Gc(s) = k \cdot \frac{Ti \cdot Td \cdot s^2 + Ti \cdot s + 1}{s} = k \cdot \frac{(s+a) \cdot (s+b)}{a \cdot b \cdot s}$$

Se fija uno de los ceros del PID en s=-4. Calcular la posición del cero restante para que se cumplan las condiciones 3 y 4. Hallar el valor de k para el cual se verifican dichas condiciones. ¿Es compatible este valor de k con las condiciones 1 y 2?.

Solución:

a) Determinación del error en estado estacionario:

$$Kp = \lim_{s \to 0} \frac{50}{(s+2) \cdot (s+3)} = \frac{50}{2 \cdot 3} = 8.33$$

$$\text{essp} = \frac{1}{1+K_p} = 0.1071 \rightarrow \text{essp} = 10.71\%$$

Se observa que el error en régimen estacionario no es nulo, por tanto será necesaria la presencia de un elemento integrador, añadido por el control, en la función de transferencia de lazo abierto.

b) La función de transferencia resultante en lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{50 \cdot k}{s \cdot (s+2) \cdot (s+3) + 50 \cdot k}$$

La expresión del error:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s \cdot (s+2) \cdot (s+3)}{s \cdot (s+2) \cdot (s+3) + 50 \cdot k}$$

Por tanto, el error en estado estacionario de velocidad resulta:

$$\text{essv} = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{s \cdot (s+2) \cdot (s+3)}{s \cdot (s+2) \cdot (s+3) + 50 \cdot k} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{6}{50 \cdot k}; \qquad \text{essv} = \frac{1}{K_v} = \frac{6}{50 \cdot k} = 0.24 \Rightarrow k = 0.5$$

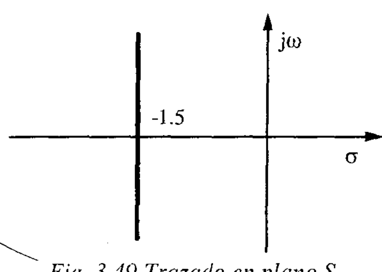


Fig. 3.49 Trazado en plano S.

La condición de t_s=2 segundos implica:

$$t_s = 2 \text{ seg.} = \frac{3}{\sigma} \Rightarrow \sigma = 1.5$$

Cuando los polos en lazo cerrado dominantes posean $\sigma = 1.5$ el sistema responderá con t_s=2; o lo que es lo mismo los polos en lazo cerrado dominantes deben pertenecer a la recta s=-1.5 en el plano S, tal y como muestra la figura 3.49.

Reglas de construcción del lugar geométrico de las raíces:

* Asíntotas:

$$\phi = \frac{\pm 180^{\circ} \cdot (2\lambda + 1)}{n - m} = \frac{\pm 180^{\circ} \cdot (2\lambda + 1)}{3} = \begin{cases} \pm 60^{\circ} \\ \pm 180^{\circ} \end{cases}$$

* Puntos de intersección de las asíntotas con el eje real:

$$\sigma = \frac{\sum p - \sum z}{n - m} = \frac{-2-3}{3} = -1.6$$

* Puntos de ruptura:

$$1+\frac{50\cdot k}{s\cdot(s+2)\cdot(s+3)}=0 \Rightarrow k=-\frac{s\cdot(s+2)\cdot(s+3)}{50}$$

$$\frac{dk}{ds}=0 \Rightarrow 3\cdot s^2+10\cdot s+6=0 \Rightarrow \begin{cases} s1=-0.784 \in LGR \\ s2=-2.548 \notin LGR \end{cases}$$

El valor de k para el punto que pertenece al lugar geométrico de las raíces es:

$$k=-\left.\frac{s\cdot(s+2)\cdot(s+3)}{50}\right|_{s=-0.784}=0.042>0 \text{ luego s=-0.784 es un punto de ruptura.}$$

* Punto de cruce con el eje imaginario:

$$\frac{50\cdot k}{s\cdot(s+2)\cdot(s+3)}=-1 \Rightarrow s^3+5\cdot s^2+6\cdot s+50\cdot k=0$$

Desarrollando el algoritmo de Routh:

$$\left\langle \begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 6 \\ s^2 & 5 & 50\cdot k \\ s^1 & \dfrac{30-50\cdot k}{5} & \\ s^0 & 50\cdot k & \end{array} \right\rangle$$

Anulando las filas del algoritmo:

$$50\cdot k=0 \Rightarrow k=0; \quad \frac{30-50\cdot k}{5}=0 \Rightarrow k=0.6$$

El polinomio auxiliar permitirá determinar las posibles raíces de la ecuación característica con parte real cero.

$$Pa(s)=50\cdot s^2+50\cdot k\Big|_{k=0.6}=50\cdot s^2+30=0 \Rightarrow s_{1,2}=\pm j2.45$$

En el lugar geométrico de las raíces se observa que no existe ningún valor de k para el cual se logre intersección entre dicho lugar y la recta s=-1.5. Por tanto no es posible verificar la condición de ts=2 segundos. En la figura 3.50 puede observarse el lugar geométrico de las raíces resultante del estudio realizado.

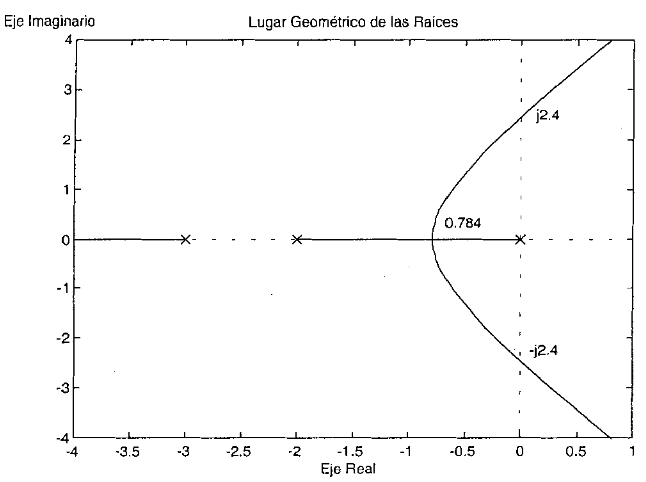


Fig. 3.50 Lugar geométrico de las raíces.

c) Se debe mantener el valor de k=0.5 para cumplir las condiciones de error en estado estacionario. El cero introducido por el control proporcional integral se sitúa sobre el polo en lazo abierto situado en s=-2; lográndose, de este modo, verificar la condición de σ=1.5, dado que este es el punto de intersección de las asíntotas con el eje real coincidiendo con el valor del punto de ruptura y el ángulo de las mismas es de 90°.

Para el valor de k=0.5 y Ti=0.5 se obtiene:

$$\text{GLA}(s) = \frac{25 \cdot 0.5}{s \cdot (s+3)}$$

La figura 3.51 muestra el lugar geométrico de las raíces en función de k considerando Ti=0.5.

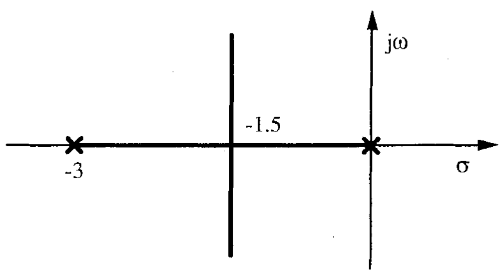


Fig. 3.51 Trazado en plano S.

Ubicación de los polos en lazo cerrado a partir de la ecuación característica:

$$s^2 + 3 \cdot s + 12.5 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -1.5 \pm 3.2\,j$$

donde, observando la figura 3.52:

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{3.2}{1.5} = 64.8^{\circ}$$

$$\phi = \operatorname{ar}\cos(\xi) = 64.8^{\circ} \Rightarrow \xi = 0.425$$

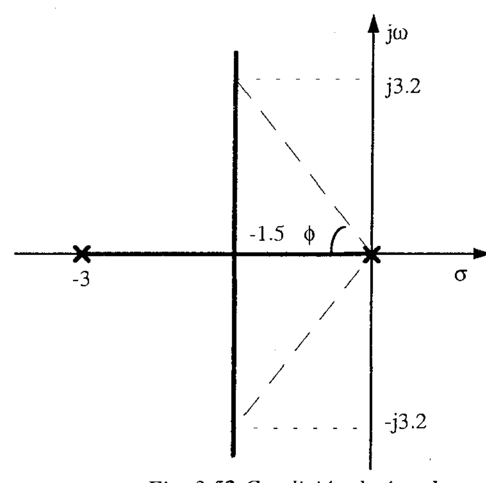


Fig. 3.52 Condición de ángulo.

de donde se deduce que el máximo sobreimpulso de la respuesta del sistema en lazo cerrado es del 23% , lo cual implica que no se verifica la condición 3.

d) Introducción de un control proporcional integral derivativo:

$$G_{LA}(s) = \frac{50 \cdot k}{(s+2)\cdot(s+3)} \cdot \frac{(s+4)\cdot(s+a)}{4 \cdot a \cdot s}$$

Para que se cumplan las condiciones 3 y 4 es necesario que el lugar geométrico de las raíces contenga los puntos del plano S que cumplen dichas condiciones.

Calculando según muestra la figura 3.53.

$$M_p = 14\% \Rightarrow \xi = 0.53$$

$$\phi = \operatorname{ar}\cos(\xi) = 58^{\circ}$$

$$\omega_d = 1.5 \cdot \operatorname{tg}58^{\circ} = 2.4$$

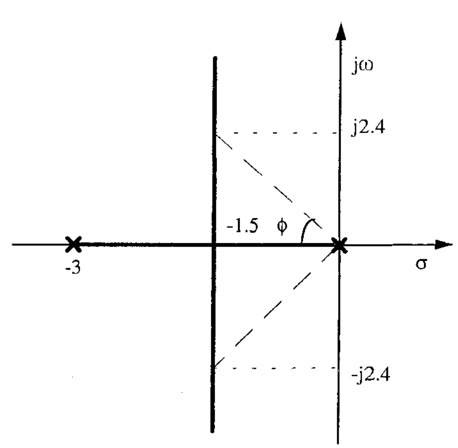


Fig. 3.53 Condición de ángulo

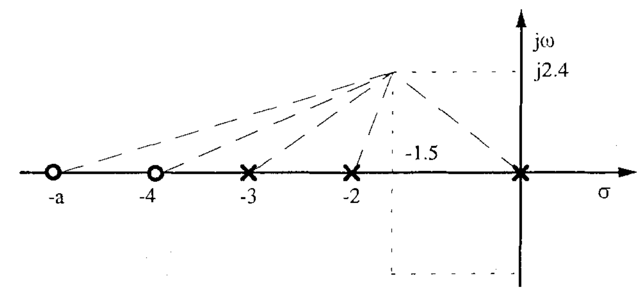


Fig. 3.54 Condición de ángulo.

Aplicando la condición de ángulo para encontrar el valor idóneo de "a":

$$\operatorname{arctg}\frac{2.4}{a-1.5}+\operatorname{arctg}\frac{2.4}{4-1.5}-\operatorname{arctg}\frac{2.4}{3-1.5}-\operatorname{arctg}\frac{2.4}{2-1.5}-180^{o}+\operatorname{arctg}\frac{2.4}{1.5}=\pm180^{o}\Rightarrow a=5$$

Para calcular el valor de k aplicamos la condición de módulo:

$$\frac{50\cdot k\cdot\sqrt{2.5^2+2.4^2}\cdot\sqrt{3.5^2+2.4^2}}{20\cdot\sqrt{1.5^2+2.4^2}\cdot\sqrt{0.5^2+2.4^2}\cdot\sqrt{1.5^2+2.4^2}}=1\Rightarrow k=0.54$$

En conclusión, la función de transferencia en lazo abierto tras el diseño resulta:

$$\mathrm{GLA}(s)=\frac{50\cdot0.54\cdot(s+4)\cdot(s+5)}{20\cdot s\cdot(s+2)\cdot(s+3)}$$

Dado que el valor de k es mayor que 0.5, el error en estado estacionario será menor que el especificado, lo cual es ventajoso.

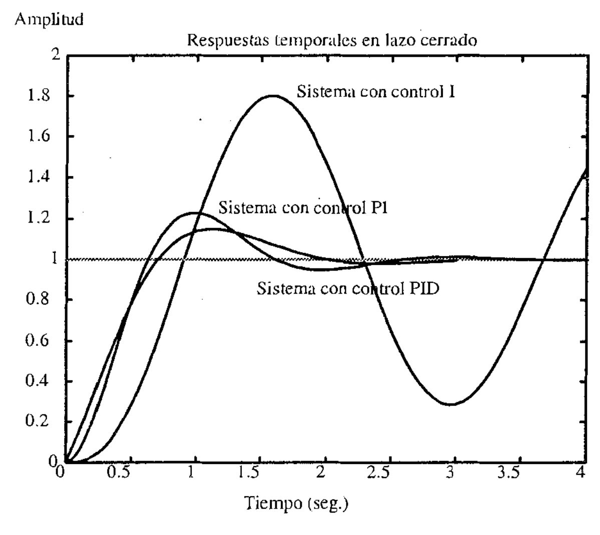


Fig. 3.55 Respuestas temporales con diversos controles.

La respuesta temporal del sistema de control diseñado frente a una entrada tipo escalón unitario permite comprobar que el error en estado estacionario es nulo manteniendo la respuesta transitoria deseada.

3.6 Estructuras controladoras cero-polo y polo-cero

Las acciones controladoras estudiadas hasta ahora son casos concretos de una estructura general denominada cero-polo o polo-cero. De hecho, el diseño de un controlador especifico en el plano S a través del lugar geométrico de las raíces se reduce al cálculo de los parámetros óptimos que permiten ubicar las raíces en lazo cerrado en determinada zona del plano S, logrando, de este modo (siempre bajo determinadas aproximaciones), la dinámica requerida al sistema. Este proceso se basa en la descripción de la función de transferencia del control a partir de sus ceros y polos.

Desde el punto de vista de diseño de filtros, se puede afirmar que las acciones de control proporcional, proporcional derivativo y proporcional integral verifican la siguiente función de transferencia:

$$Gc(s) = kp \cdot \frac{1+\frac{s}{\omega c}}{1+\frac{s}{\omega p}} = kp \cdot \frac{\omega p}{\omega c} \cdot \frac{s+\omega c}{s+\omega p} = k \cdot \frac{s+\omega c}{s+\omega p} \qquad (3.13)$$

donde:

si $\omega c > \omega p$ se obtiene una red polo-cero o filtro paso bajo

si $\omega c < \omega p$ se obtiene una red cero-polo o filtro paso alto

si $\omega c = \omega p$ se obtiene un control proporcional

si $\omega p \to \infty$ se obtiene un control proporcional derivativo

si $\omega p \to 0$ se obtiene un control proporcional integral

Las estructuras cero-polo y polo-cero pueden diseñarse en dominio temporal de forma análoga a las distintas acciones de control que se han estudiado en este capítulo. Para ello debe observarse que desde el punto de vista de adición de singularidades a la función de transferencia en lazo abierto se introducen un cero y un polo reales; por esta razón el diseño óptimo conlleva la obtención de tres parámetros, en lugar de dos como sucedía en las acciones de control proporcional, proporcional derivativo y proporcional integral; obviamente, esta particularidad complicará el diseño, efectuándose éste, normalmente, en dominio frecuencial.

En el procedimiento de diseño en dominio temporal existe una zona del plano S que, bajo determinadas aproximaciones, verifica la dinámica deseada; siendo *si* un punto de interés de dicha zona, para que *si* sea polo en lazo cerrado deben verificarse las condiciones de ángulo y módulo:

$$|G_{LA}(s_i)| = 1 \quad \text{Condición de ángulo} \tag{3.14}$$

$$\angle G_{LA}(s_i) = \pm 180^{\circ} \quad \text{Condición de módulo} \tag{3.15}$$

Dado que la topología de control es tipo serie $G_{LA}(s) = G_p(s) \cdot G_c(s)$ y siendo $s_i = -\sigma + j\omega_d$, se obtendrán las siguientes expresiones:

$$|G_p(s_i)| \cdot k \cdot \frac{|s_i + \omega_c|}{|s_i + \omega_p|} = 1 \Rightarrow |G_p(s_i)| \cdot k \cdot \frac{\sqrt{(\omega_c - \sigma)^2 + \omega_d^2}}{\sqrt{(\omega_p - \sigma)^2 + \omega_d^2}} = 1 \tag{3.16}$$

$$\angle G_p(s_i) + \angle G_c(s_i) = \pm 180^{\circ} \Rightarrow \angle G_p(s_i) + \operatorname{arctg}\frac{\omega_d}{\omega_c - \sigma} - \operatorname{arctg}\frac{\omega_d}{\omega_p - \sigma} = \pm 180^{\circ} \tag{3.17}$$

A estas dos expresiones debe unírsele la resultante de aplicar la especificación de precisión medida en términos del error estacionario, formando un conjunto en sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas que deberá resolverse por procedimientos numéricos. Este hecho, unido a que posteriormente al cálculo deben verificarse las aproximaciones realizadas, provoca que usualmente el diseño de estas redes se realice en dominio frecuencial, diseñándose, fundamentalmente, estructuras proporcional, proporcional derivativo y proporcional integral en dominio temporal.

3.7 Discretización de sistemas de tiempo continuo

Generalmente, el diseño de sistemas de control se realiza en función de la realización física final; por esta razón, se diseñan sistemas de tiempo continuo cuando la implementación resultante es tipo hardware o mediante circuitería electrónica, y los sistemas de tiempo discreto para una realización tipo software o programada. Sin embargo, cabe la posibilidad de transformar los sistemas de control en tiempo continuo o analógicos en sistemas de tiempo discreto; para lograr este propósito es necesario transformar el hardware y la caracterización dinámica del sistema de control.

El problema, de este modo, se reduce a obtener los parámetros adecuados del sistema discreto en función de los parámetros de la función de transferencia del sistema de tiempo continuo, de modo que la sustitución de un hardware (con la programación adecuada) por otro, en la topología de control total, sea adecuada. Las figuras del ejemplo que se realiza a continuación muestran a través de diagrama de bloques el proceso de discretización.

Existen varios métodos de discretización de sistemas o filtros analógicos, como el método de Tustin, también denominado transformación bilineal o integración trapezoidal; sin embargo, el estudio se centrará en un método eficaz y simple desde el punto de vista algebraico como es el método del mapeado cero-polo.

Se puede resumir el proceso de mapeado cero-polo diciendo que es el resultado de aplicar independientemente la transformación $z = e^{sT}$ a los ceros y polos de la función de transferencia de tiempo continuo G(s) para obtener la función de transferencia transformada de tiempo discreto G(z), manteniendo la ganancia de dicha función de transferencia para s=0 o z=1, según el domino de estudio. Sin embargo alguna salvedad debe comentarse:

• Deben transformarse los ceros en infinito que posea la función de transferencia G(s) en ceros en z=-1 en la función G(z). Para razonar este aspecto debe considerarse que la aplicación directa de la transformación $z = e^{sT}$ ofrece un resultado infinito; sin embargo puede considerarse que el efecto del cero en infinito sobre la función muestreada G*(s) implica ceros en posiciones $\omega = \frac{n}{2} \cdot \omega s = \frac{n \cdot \pi}{T}$ en el plano S por repetición de las bandas al aplicar el muestreo. La transformación de $s = j\frac{\omega s}{2}$ mediante $z = e^{sT}$ ofrece el resultado z=-1.

El procedimiento de discretización según mapeado cero-polo puede resumirse, de este modo, en los siguientes pasos:

1. Debe factorizarse G(s) obteniendo sus ceros y polos. Los ceros y polos de G(s) se transforman del plano S al plano Z aplicando la relación $z = e^{sT}$.

2. Los ceros en infinito de G(s) se mapean al punto z=-1 (manteniendo su multiplicidad), en conclusión por cada cero en infinito de G(s) se origina un factor z+1 en la función de transferencia G(z).

3. Debe ajustarse la ganancia en continua del sistema discretizado para adquirir el mismo valor que la ganancia en continua del sistema de tiempo continuo. Para ello se verifica la coincidencia de la ganancia de G(z) en z=1 y de la ganancia de G(s) en s=0.

Observación: si el sistema de tiempo continuo puede aproximarse por un filtro paso alto en el margen de frecuencia de trabajo, en el procedimiento anterior deberían sustituirse ceros por polos y evaluar las funciones en z=-1 y s=∞ para sistema discreto y analógico, respectivamente.

En sistemas de control de tiempo discreto, tal y como se ha estudiado anteriormente, el modelado exige la presencia de un sistema mantenedor de datos que no aparece en la topología de los sistemas de control de tiempo continuo. Por esta razón, para poder obtener una buena discretización del sistema de control de tiempo continuo es conveniente incluir los efectos del mantenedor de datos respecto a la estabilidad relativa del sistema en lazo cerrado, de este modo la sustitución del hardware analógico por el hardware digital no presentará un efecto desestabilizador importante. Para lograr este objetivo se realizan diversas aproximaciones lineales de la relación entrada-salida del mantenedor de datos, el ejemplo siguiente muestra con detalle el proceso de discretización presentado.

Ejemplo 3.7

Se pretende estudiar el proceso de discretización del sistema analógico de la figura 3.56:

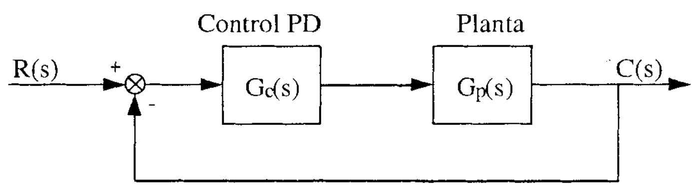


Fig. 3.56 Sistema de control analógico.

donde:

$$G_P(s) = \frac{1}{s^2};\ G_C(s) = k_1 \cdot (s+4)$$

1) Se proporciona la siguiente estructura de un control discreto, fig. 3.57:

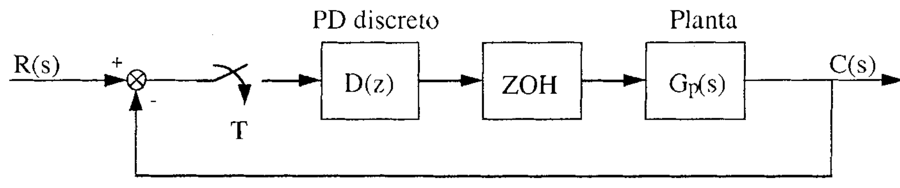


Fig. 3.57 Sistema de control discreto.

donde:

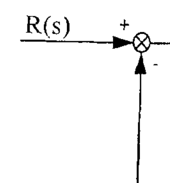
$$D(z) = k_2 \cdot \frac{z-a}{z+1};\ G_P(s) = \frac{1}{s^2};\ T = 0.1 \text{ seg.};\ G_{oh}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

a) Encontrar los valores de k_2 y "a" del controlador proporcional derivativo discreto para que el sistema discreto tenga las mismas características dinámicas que el sistema analógico de la figura 3.56 para k_1=4; previamente, indique la posición de los polos en lazo cerrado deseados en el plano Z.

b) Calcular el número de muestras por ciclo de la señal discreta. ¿Estamos realizando una buena simulación del sistema analógico?.

En general, el procedimiento de discretización en la práctica no es el presentado en el apartado anterior, debido a que exige un cálculo del controlador en el dominio discreto.

2) Se propone como alternativa el diagrama de bloques de la figura 3.58.



a) Obtener el lu

b) Determinar
tenemos para k_1

3) Se define el s

R(s)

donde:

a) Rediseñar el c
que la dinámica

b) Transformar
plano Z. Obtener
apartado anterio
proporcional deri
usted seguiría en

Solución:

1) La función de

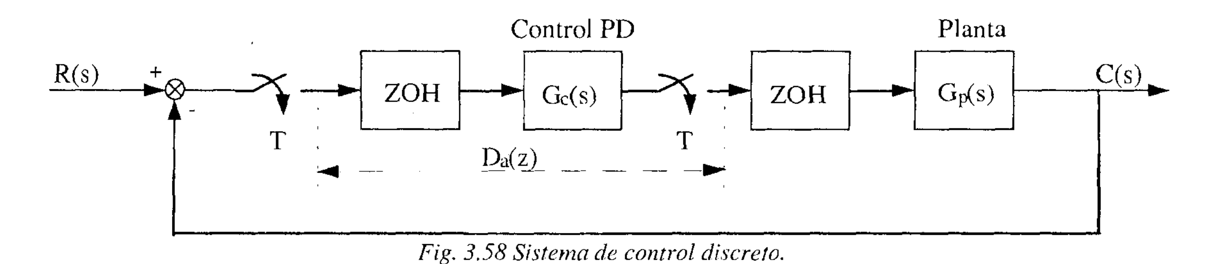


Fig. 3.58 Sistema de control discreto.

a) Obtener el lugar geométrico de las raíces del sistema discreto en función de k_1.

b) Determinar el rango de valores de k_1 para el cual el sistema es estable. ¿Qué tipo de respuesta tenemos para $k_1=4$?. ¿Realizamos una buena simulación del sistema analógico?.

3) Se define el sistema analógico de la figura 3.59:

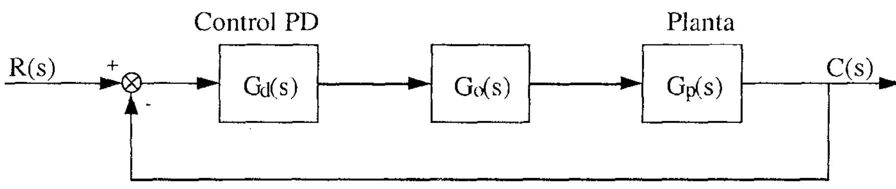


Fig. 3.59 Sistema de control analógico.

donde:

$$Gd(s) = k_3 \cdot (s+b); \; Go(s) \cong Goh(s) \Rightarrow Go(s) = \frac{1}{\frac{T}{2} \cdot s + 1} \cong \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

a) Rediseñar el controlador proporcional derivativo analógico (determinación de k_3 y "b") para lograr que la dinámica requerida al sistema sea la del sistema de la figura 3.56 con $k_1=4$.

b) Transformar el cero del proporcional derivativo diseñado en el apartado anterior del plano S al plano Z. Obtener el valor de ganancia en continua del control proporcional derivativo diseñado en el apartado anterior. Comparar estos resultados con la función de transferencia del controlador proporcional derivativo digital diseñado en el apartado 1. Resumir el método de discretización que usted seguiría en la práctica.

Solución:

1) La función de transferencia en lazo abierto para $k_1=4$ resulta:

$$GLA(s) = \frac{4 \cdot (s+4)}{s^2}$$

Si se desean las mismas características dinámicas en el sistema discreto que en el sistema analógico, será necesario que las raíces dominantes coincidan en ambos casos, según la hipótesis de una buena simulación del sistema analógico por parte del sistema discreto.

$$G_{LA}(s)+1=0 \Rightarrow s^2+4\cdot s+16=0 \Rightarrow s_{1,2}=-2\pm j3.4641$$

Transformación de los polos en lazo cerrado deseados del plano S al plano Z:

$$z=e^{Ts}=e^{-\sigma T}\cdot e^{\pm j\omega_d T}=e^{-\sigma T}\cdot\left[\cos\omega_d T\pm j\sin\omega_d T\right]$$

$$z_{1,2}=e^{-2\cdot 0.1}\cdot\left[\cos(3.4641\cdot 0.1)\pm j\sin(3.4641\cdot 0.1)\right]=0.77\pm j0.278$$

Función de transferencia en lazo abierto del sistema discreto:

$$G(z)=\left(1-z^{-1}\right)\cdot Z\left[\frac{1}{s^3}\right]_{T=0.1}=\frac{0.01\cdot(z+1)}{2\cdot(z-1)^2}$$

$$G_{LA}(z)=D(z)\cdot G(z)=k_2\cdot\frac{0.01\cdot(z+a)}{2\cdot(z-1)^2}$$

Cálculo de k_2 y a:

- Aplicando condición de ángulo:

$$\text{arctg}\frac{0.278}{0.77-a}-360^{\circ}+2\cdot\text{arctg}\frac{0.278}{1-0.77}=\pm 180^{\circ}\Rightarrow a=0.717$$

- Aplicando condición de módulo:

$$k_2\cdot\frac{0.01}{2}\cdot\frac{\sqrt{(0.77-0.717)^2+0.278^2}}{(1-0.77)^2+0.278}=1\Rightarrow k_2=92$$

Estructura del controlador proporcional derivativo digital: $D(z)=92\cdot\dfrac{z-0.717}{z+1}$

Número de muestras por ciclo de señal discreta: $\dfrac{\omega_s}{\omega_d}=\dfrac{2\pi/T}{\omega_d}=\dfrac{2\pi/0.1}{3.461}=18.138$

Se obtienen más de 18 muestras por ciclo, esto implica una buena representación del sistema continuo análogo; el sistema discreto responderá de forma análoga al sistema continuo equivalente.

En las gráficas siguientes, fig. 3.60 y 3.61, pueden verse la respuesta de uno y otro sistema.

3. Diseño de si

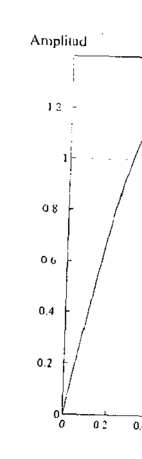


Fig. 3.60

Se debe obse dominantes de

2) Función de

D

GL

Lugar geométri

* LGR sobre ej como z<-1.

* Asíntotas: úni

* Puntos de rup

El punto de z=1

Esperamos un ecuación identif

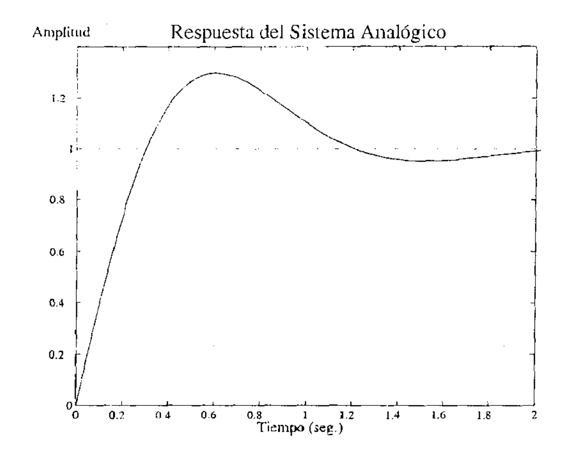


Fig. 3.60 *Respuesta del sistema analógico.*

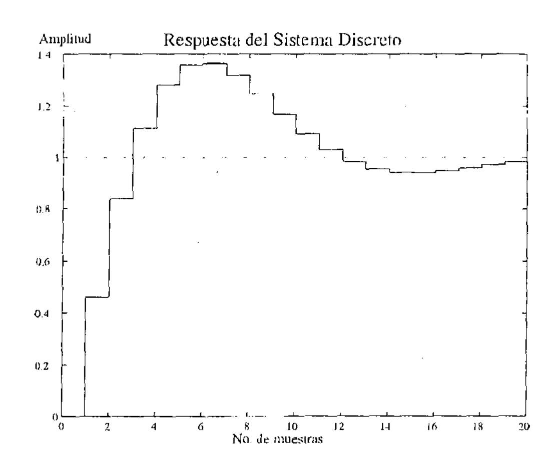


Fig. 3.61 *Respuesta del sistema discreto.*

Se debe observar que las características dinámicas no vienen dadas por aproximación de polos dominantes debido a la cercanía del cero en lazo cerrado a dichos polos.

2) Función de transferencia en lazo abierto:

$$D_A(z) = k_1 \cdot \left(1 - z^{-1}\right) \cdot Z\left[\frac{(s+4)}{s}\right]_{T=0.1} = k_1 \cdot \left(1 - z^{-1}\right) \cdot \left[1 - \frac{4 \cdot z}{z-1}\right] = k_1 \cdot \frac{5 \cdot z - 1}{z}$$

$$G_{LA}(z) = D_A(z) \cdot G(z) = k_1 \cdot \frac{0.01 \cdot (5 \cdot z - 1) \cdot (z+1)}{2 \cdot z \cdot (z-1)^2} = k_1 \cdot \frac{0.025 \cdot (z - 0.2) \cdot (z+1)}{z \cdot (z-1)^2}$$

Lugar geométrico de las raíces en función de k_1:

* LGR sobre eje real: pertenecen al LGR las zonas sobre eje real comprendidas entre z=0 y z=0.2, así como z<-1.

* Asíntotas: únicamente existirá una asíntota que coincide con el eje real.

* Puntos de ruptura: son soluciones de la ecuación $\frac{dk_1}{dz} = 0 \Rightarrow z = \begin{cases} 0.1182 \pm j0.238 \\ 1 \\ -2.836 \end{cases}$

El punto de z=1 es un punto de ruptura de dispersión (coincide con los polos en lazo abierto en z=1).

Esperamos un punto de ruptura de confluencia en $-\infty < z < -1$; observando las soluciones de la ecuación identificamos este punto con z=-2.836, para este punto el valor de k_1 asociado es:

$$k1 = \left.\frac{-z\cdot(z-1)^2}{0.025\cdot(z+1)\cdot(z-0.2)}\right|_{z=-2.836} \cong 300$$

La solución compleja de la ecuación no pertenece al lugar geométrico de la raíces como puede comprobarse mediante la condición de ángulo.

* Puntos de corte con el eje imaginario:

$$\text{ecuación característica: } 1+\mathrm{GLA}(z)=0$$

$$1+k1\cdot\frac{0.025\cdot(z-0.2)\cdot(z+1)}{z\cdot(z-1)^2}=0 \Rightarrow z^3+(0.025\cdot k1-2)\cdot z^2+(0.02\cdot k1+1)\cdot z-0.05\cdot k1=0$$

Algoritmo de Routh:

$$\left\langle\begin{array}{c|cc} z^3 & 1 & 0.02\cdot k1+1 \\ z^2 & 0.025\cdot k1-2 & -0.005\cdot k1 \\ z^1 & \dfrac{0.0005\cdot k1^2-0.01\cdot k1-2}{0.025\cdot k1-2} & \\ z^0 & -0.005\cdot k1 & \end{array}\right\rangle$$

Valores de k1 que anulan alguna fila:

$$k1=0;\ 0.0005\cdot k1^2-0.01\cdot k1-2=0 \Rightarrow k1^2-20\cdot k1-4000=0 \Rightarrow k1_{1,2}=\begin{cases}-54\\ 74\end{cases}$$

Polinomio auxiliar: $\left.(0.025\cdot k1-2)\cdot z^2-0.005\cdot k1\right|_{k1=74}=0 \Rightarrow z_{1,2}=\pm j1.57$

* Puntos de intersección con el circulo unitario:

$$\text{Ecuación característica bilineal: } 1+D_a(w)\cdot G(w)=0 \Rightarrow 1-0.3\cdot k1\cdot\frac{(w+13.33333)\cdot(w-20)}{w^2\cdot(w+20)}=0$$

$$w^3+(20-0.3\cdot k1)\cdot w^2+2\cdot k1\cdot w+80\cdot k1=0$$

Algoritmo de Routh:

$$\left\langle\begin{array}{c|cc} w^3 & 1 & 2\cdot k1 \\ w^2 & 20-0.3\cdot k1 & 80\cdot k1 \\ w^1 & \dfrac{2\cdot k1\cdot(20-0.3\cdot k1)-80\cdot k1}{20-0.3\cdot k1} & \\ w^0 & 80\cdot k1 & \end{array}\right\rangle$$

Observando e
concreto, par
discretizar seg

3) Diseño del sis

Deseamos los po

A partir de la

parámetros k3 y

- Aplica

- Aplica

Control proporci

Observando el algoritmo de Routh se obtiene que el sistema es inestable para cualquier valor de k_1; en concreto, para $k_1=4$ se tiene una respuesta oscilatoria de amplitud creciente, con lo cual no podemos discretizar según este método. La figura 3.62 muestra el lugar geométrico resultante.

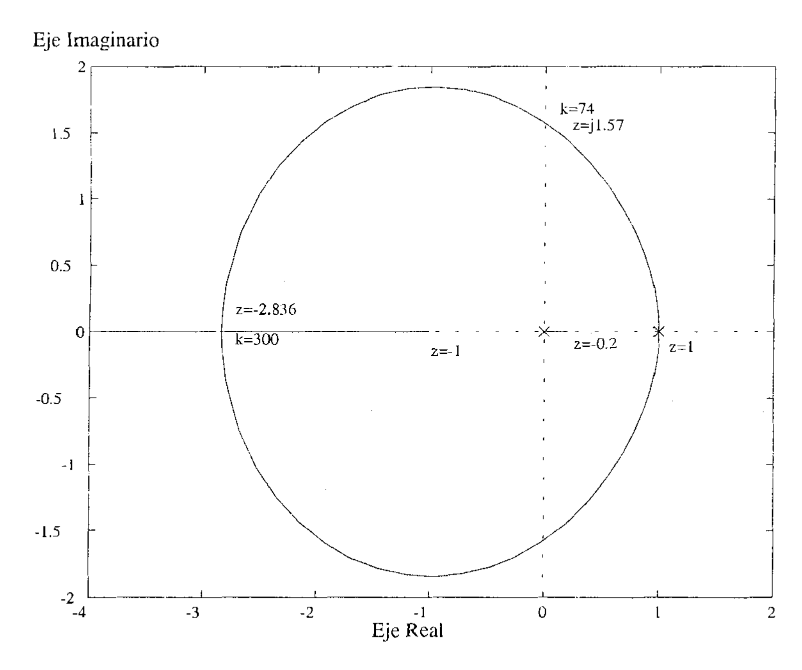


Fig. 3.62 Lugar geométrico de las raíces.

3) Diseño del sistema analógico:

Deseamos los polos en lazo cerrado dominantes en la posición $s_{1,2} = -2 \pm j3.4641$.

A partir de la función de transferencia en lazo abierto: $G_{LA}(s) = \frac{20 \cdot k_3 \cdot (s+b)}{s^2 \cdot (s+20)}$ se calculan los parámetros k_3 y "b" aplicando las condiciones de ángulo y módulo:

- Aplicando condición de ángulo:

$$\operatorname{arctg}\frac{3.4641}{b-2} - \operatorname{arctg}\frac{3.4641}{20-2} + 2 \cdot \operatorname{arctg}\frac{3.4641}{2} = \pm 180^{\circ} \Rightarrow b = 3.2$$

- Aplicando condición de módulo:

$$20 \cdot k_3 \cdot \frac{\sqrt{1.2^2 + 3.4641^2}}{\sqrt{(20-2)^2 + 3.4641^2} \cdot (2^2 + 3.4641^2)} = 1 \Rightarrow k_3 = 4$$

Control proporcional derivativo diseñado: $G_d(s) = 4 \cdot (s + 3.2)$

Transformación del cero del control proporcional derivativo del plano S al plano Z:

$z = e^{Ts} = e^{-3.2 \cdot 0.1} = 0.726$. Aproximadamente coincide con el diseñado para el proporcional derivativo digital del apartado 1.

Valor en continua: $\lim_{s \to 0} Gd(s) = Gd(0) = 4 \cdot 3.2 = 12.8$

Valor en continua del control proporcional derivativo digital:

$$\lim_{s \to 1} D(z) = D(1) = 92 \cdot \frac{1 - 0.717}{1 + 1} = 13$$

Debe observarse que los valores obtenidos son aproximadamente iguales.

Método de discretización:

1. Rediseñar el control analógico considerando los efectos del mantenedor de datos de orden cero mediante la aproximación:

$$Go(s) = \frac{1}{\frac{T}{2} \cdot s + 1} \cong \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

2. Obtener los valores del control discreto trasladando del plano S al plano Z las singularidades del control analógico y calculando el mismo valor de ganancia en continua.

El resultado obtenido es lógico, debido a que, al realizar una compensación en el dominio analógico, incluyendo la aproximación del mantenedor de datos, se está considerando el efecto desestabilizador del mismo (observar la inclusión de un polo en la cadena directa). Ello provoca que podamos realizar la transformación directa de la función de transferencia del controlador del dominio S al dominio Z.

3.8 Realizaci

Los controles t
de las acciones
dominio discre
existiendo dist
dependerá del r
un método conc

3.8.1 Acción p

La acción propo
de error por un

3.8.2 Acción d

La manera de re
pendiente de la
muestra la figur

m(kT)

Aplicando la tra

De esta forma,
aplicar para la a

3.8 Realización discreta de controladores temporales

Los controles temporales vistos hasta el momento han estado basados en una combinación adecuada de las acciones proporcional, integral y derivativa. La manera de obtener estos controladores en el dominio discreto consiste en deducir la expresión de las acciones básicas en una forma discreta, existiendo distintos métodos para deducir estas expresiones, por lo que el resultado obtenido dependerá del método utilizado. En consecuencia, por razones de extensión y simplicidad, se estudiará un método concreto, utilizando el resultado así obtenido en análisis posteriores.

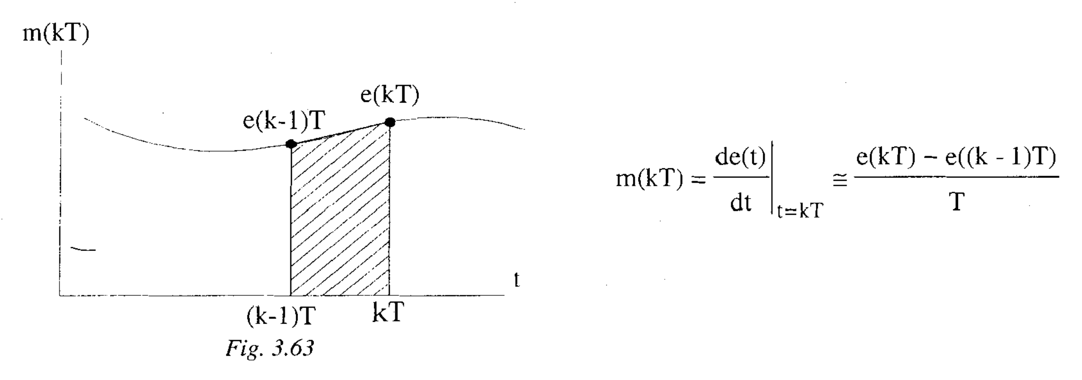
3.8.1 Acción proporcional

La acción proporcional tiene una implementación discreta directa, multiplica cada muestra de la señal de error por un valor de ganancia kp.

$$G(z) = kp$$

3.8.2 Acción derivativa

La manera de realizar la acción de control consiste en aproximar la derivada de la señal de error por la pendiente de la recta formada entre las muestras (k-1)T y kT de la señal de error discretizada, tal como muestra la figura 3.63. Definiendo m(kT) como la derivada de e(t) en el instante t=kT :



$$m(kT) = \left.\frac{de(t)}{dt}\right|_{t=kT} \cong \frac{e(kT) - e((k-1)T)}{T}$$

Fig. 3.63

Aplicando la transformada Z a la expresión anterior :

$$G(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{T} = \frac{1}{T} \cdot \frac{z-1}{z}$$

De esta forma, tomando en cuenta la ganancia derivativa, la función de transferencia que se debe aplicar para la acción derivativa es :

$$G(z) = k_d \frac{1}{T} \cdot \frac{z-1}{z} \qquad (3.18)$$

3.8.3 Acción integral

La acción integral utiliza la integración trapezoidal como método de discretización. Según la figura 3.64, el área en el instante actual t=kT de la señal de error discretizada será igual al área comprendida por el trapecio entre los instantes t=(k-1)T y t=kT, más el área m((k-1)T), integrada con anterioridad y debida a la suma de áreas de los trapecios formados con las muestras anteriores al instante t=(k-1)T, (zona rayada).

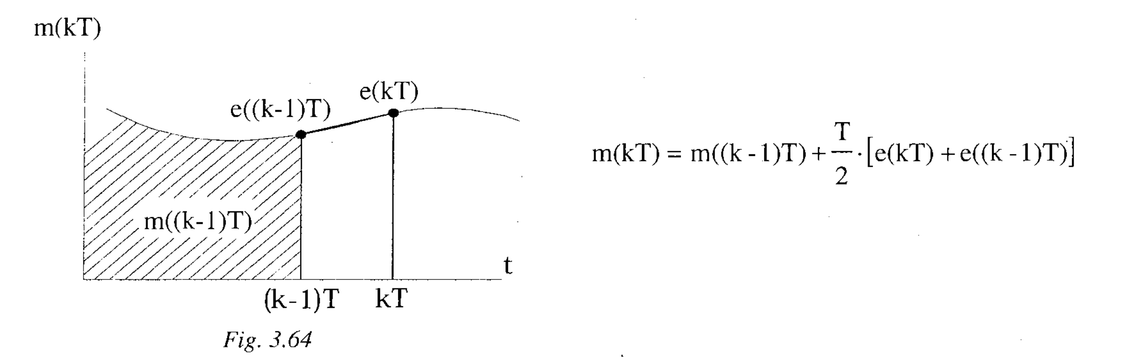


Fig. 3.64

Aplicando la transformada Z:

$$G(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}$$

Considerando la ganancia integral ki, la función de transferencia para la acción integral:

$$G(z) = ki \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \qquad (3.19)$$

El ejemplo 3.8 muestra el resultado de utilizar la integración rectangular en lugar de la integración trapezoidal. Las expresiones obtenidas por ambos métodos son diferentes; sin embargo tienen en común el polo situado en z=1 debido a la acción integrativa.

Ejemplo 3.8

La acción integral puede conseguirse mediante integración rectángular, donde el área bajo la curva de la señal en cuestión se aproxima mediante rectángulos, fig. 3.65. La amplitud de los rectángulos puede tomarse como la amplitud de la muestra actual (forward), o como la amplitud de la muestra anterior (backward). Considerando este último caso :

$$m(kT) = m((k-1)T) + T \cdot e(k-1)T)$$

Aplicando la transformada Z y considerando la ganancia integral ki, se obtiene:

$$G(z) = ki \cdot \frac{T \cdot z^{-1}}{1-z^{-1}} = ki \cdot \frac{T}{z-1} \qquad (3.20)$$

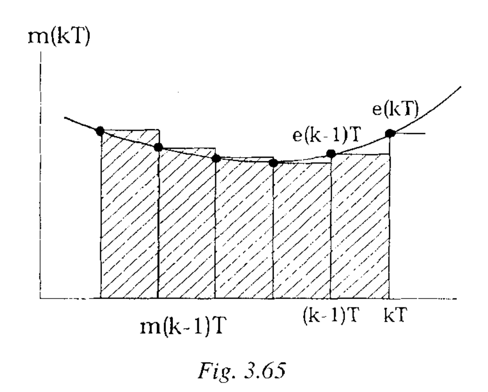


Fig. 3.65

3.8.4 Diagrama de bloques del control discreto

La figura 3.66 muestra el diagrama de bloques que agrupa las acciones que determinan los controles PD, PI y PID discretos. Cualquiera de estos controles puede implementarse mediante la selección adecuada de estos bloques.

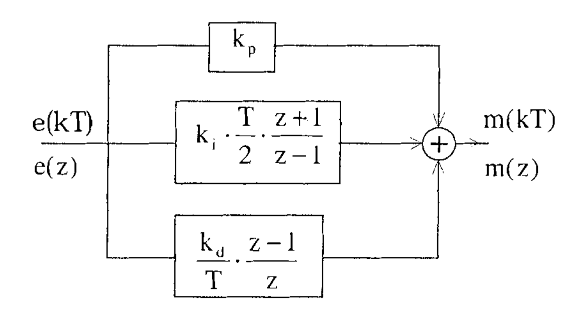


Fig. 3.66 Diagrama de bloques con las acciones proporcional, integrativa y derivativa.

De la acción integral, en el caso discreto, se extraen las mismas conclusiones, con respecto al régimen estacionario de un sistema, que en el caso continuo. Se puede observar que los polos en z=1 en lazo abierto del plano Z son los responsables de la mejora en régimen estacionario de la respuesta temporal, al igual que ocurría con los polos en el origen (s=0) del plano de Laplace. Por esta razón, es conveniente introducir la acción integral en el control discreto siempre que se quiera mejorar la respuesta temporal en régimen estacionario de un sistema. No obstante, conviene considerar también los efectos que tiene la acción integral sobre el transitorio y sobre la estabilidad del sistema.

El diseño de los controladores PD, PI y PID consiste básicamente en ajustar los valores de los coeficientes kp , ki y kd , de manera que se cumplan las especificaciones requeridas. No obstante no hay que olvidar que estos controladores pueden diseñarse utilizando cualquiera de los métodos vistos con anterioridad.

3.9 Control PI discreto

El control PI está formado por la suma de la acción proporcional y de la acción integrativa, de manera que su función de transferencia considerando el diagrama de la figura 3.66 es :

$$G_{PI}(z) = k_p + \frac{k_i T(z+1)}{2(z-1)} = (k_p + k_i \frac{T}{2}) \cdot \frac{z + \frac{k_i T - 2k_p}{k_i T + 2k_p}}{z-1} \qquad (3.20)$$

El control PI en lazo abierto introduce un polo en z = 1, mejorando la respuesta temporal en régimen estacionario, y un cero en el eje real del plano Z cuya posición depende de kp y ki, fig. 3.67.

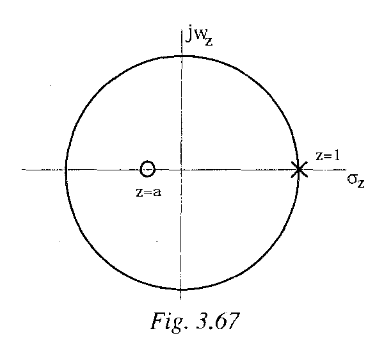
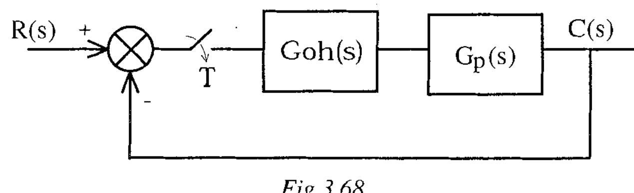


Fig. 3.67

El control PI será útil en aquellos sistemas que carecen de polos en z = 1. La forma de diseñar el control dependerá de los requisitos esperados. Si no existen especificaciones temporales se puede optar por cancelar uno de los polos de lazo abierto de la planta con el cero que introduce el control, lo que se denomina de aquí en adelante "método de cancelación polo-cero". En el caso de existir especificaciones temporales, se debe tratar de hallar la posición adecuada del cero del PI mediante el lugar geométrico de las raíces, de forma que se cumplan dichas especificaciones.

Ejemplo 3.9

Se quiere aplicar un control PI discreto al sistema realimentado de la siguiente figura:



$$G_p(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

T = 0.1 seg.

Fig.3.68

La función de transferencia en lazo abierto :

$$G_{oh}G_p(z) = \frac{4.52 \cdot 10^{-2}(z+0.9048)}{(z-0.9048)(z-0.8187)}$$

Este sistema, sin controlador discreto, tiene un error en régimen estacionario frente a una entrada escalón del 16.3%, ya que carece de polos en z = 1. La expresión del control PI a utilizar, ec. (3.20) :

$$G_{PI}(z) = (k_p + k_i \frac{T}{2}) \cdot \frac{z + \frac{k_i T - 2k_p}{k_i T + 2k_p}}{z-1}$$

Al no haber esp
tanto, como crit
sistema (anula e
del control PI
incremento en e
consiga aument
distancia a recor

Despejando se c
que la función d

La expresión del

Según se muestr
ec.(3.21), en lazo
error en régimen
observarse tambi
estacionario fren
tiempo de establ
sistema en lazo a

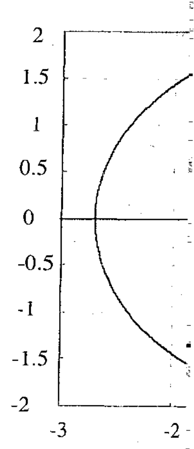


Fig. 3.69 LGR del

Al no haber especificaciones, no es necesario imponer, en principio, ninguna respuesta temporal. Por tanto, como criterio de diseño puede optarse por imponer el polo del control PI como un polo más del sistema (anula el error estacionario frente a una entrada escalón , en este caso) y cancelar con el cero del control PI uno de los polos de la planta (método de cancelación polo-cero), evitando así el incremento en el orden del sistema. El polo a cancelar debe ser el más cercano a z = 1, de forma que se consiga aumentar el margen de estabilidad del sistema (margen de valores de k_p), aumentando la distancia a recorrer por los polos en lazo cerrado antes de llegar al borde de la inestabilidad. Así :

$$\frac{k_i T - 2k_p}{k_i T + 2k_p} = -0.9048$$

Despejando se obtiene $k_p/k_i = 1.0023$, de donde tomado kp = 1, y ki = 1/1.0023 = 0.9977, resulta que la función de transferencia de lazo abierto del control más la planta es (ver fig. 3.69) :

$$G_{PI}(z) \cdot G_{oh}G_p(z) = \frac{0.0475(z + 0.9048)}{(z-1)(z-0.8187)} \tag{3.21}$$

La expresión del control PI :

$$G_{PI}(z) = 1.0499 \cdot \frac{z - 0.9048}{z - 1}$$

Según se muestra en el LGR discreto, fig. 3.69, para el valor de la ganancia en lazo abierto de 0.0475, ec.(3.21), en lazo cerrado los polos están ubicados en z = 0.882 ± 0.26j , siendo el sistema estable. El error en régimen estacionario nulo y la respuesta temporal se muestran en la figura 3.70. Debe observarse también, fig. 3.70, que la respuesta temporal con control PI corrige el error en régimen estacionario frente a una entrada escalón, pero en este caso empeora el máximo sobreimpulso y el tiempo de establecimiento. Estos parámetros pueden mejorarse reduciendo el valor de la ganancia del sistema en lazo abierto, ec. (3.21).

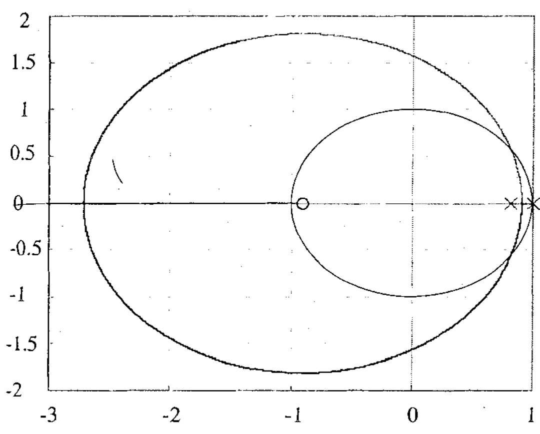


Fig. 3.69 LGR del sistema discreto definido en (3.21)

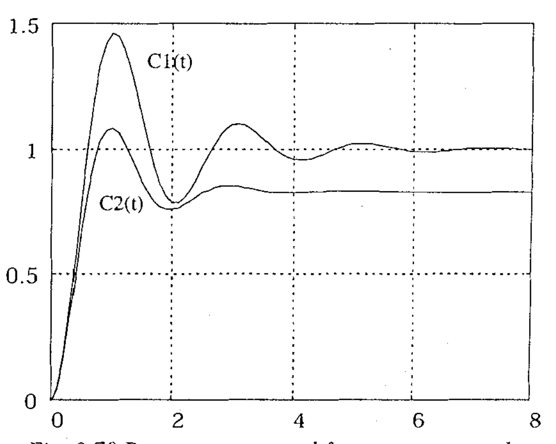


Fig. 3.70 Respuesta temporal frente a una entrada escalón. C1(t) con control PI y C2(t) sin control.

3.10 Control PD discreto

En el control PD intervienen la suma de la acción proporcional y de la acción derivativa, ec. (3.22). El control PD introduce de esta manera un polo en z=0 y un cero a situar dentro del eje real positivo del plano Z, dependiendo del valor de los parámetros k_p y k_d del control, por lo que el control PD discreto difiere bastante del control PD analógico.

$$G_{PD}(z) = k_p + k_d \frac{z-1}{Tz} = \frac{k_p T + k_d}{T} \cdot \frac{z - \dfrac{k_d}{k_p T + k_d}}{z} \qquad (3.22)$$

El control proporcional-derivativo se puede diseñar a través del método de cancelación polo-cero, tal como se hacía en el ejemplo 3.2, aunque también se podría diseñar con el propósito de ajustar alguna especificación temporal del sistema a controlar, teniendo en cuenta, para ello, el efecto del polo en z=0 y considerando que la zona útil donde se puede posicionar el cero está comprendida entre z=0 y z=1.

3.11 Control PID discreto

El control PID aglutina las acciones de control proporcional, integral y derivativa, es por ello que ofrece mayor libertad de diseño del controlador. La función de transferencia del control proporcional-integral-derivativo es :

$$G_{PID}(z) = k_p + k_i \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} + k_d \frac{z-1}{Tz} \qquad (3.23)$$

Operando sobre la ecuación 3.23 se obtiene la siguiente expresión:

$$G_{PID}(z) = \frac{k_i T^2 + 2k_p T + 2k_d}{2T} \cdot \frac{z^2 + \dfrac{k_i T^2 - 2k_p T - 4k_d}{k_i T^2 + 2k_p T + 2k_d} \cdot z + \dfrac{2k_d}{k_i T^2 + 2k_p T + 2k_d}}{z \cdot (z-1)} \qquad (3.24)$$

Por lo que el control PID tiene un polo en z =1, otro polo en z=0 y un par de ceros a situar en el plano Z, dependiendo de los requisitos del diseño. En sí el control es parecido al control proporcional-integral (PI), pero con la diferencia de que añade un cero más, es decir tiene dos ceros en lugar de uno, lo que proporciona una mayor libertad de diseño, pudiéndose diseñar el control de manera que cumpla determinadas especificaciones, a través de las condiciones de ángulo y de módulo, tal como se hacía en el caso analógico (ej. 3 método de ajuste utilizando el lugar geométrico de las raíces), o por el contrario, empleando el par de ceros que introduce el PID para cancelar los polos de la planta que se debe compensar (método de cancelación polo-cero), sustituyendo de esta manera la dinámica temporal de la planta por una dinámica temporal forzada por el controlador PID (ej. 4).

Ejemplo 3.10

Dado el sistema realimentado de la figura siguiente :

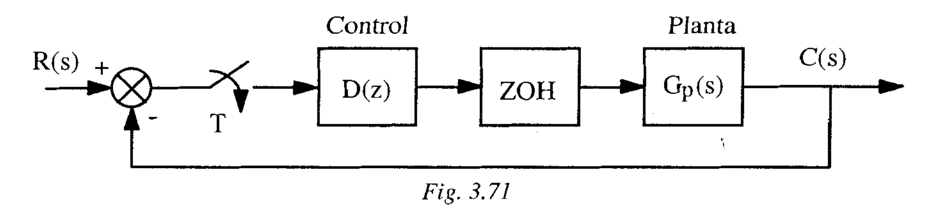


Fig. 3.71

donde: $G_p(s) = \dfrac{k}{(s+1)\cdot(s+2)}$; $T = 0.1$ seg.; $G_{oh}(s) = \dfrac{1-e^{-Ts}}{s}$

se desea diseñar un sistema de control que verifique las siguientes características temporales :

1. Máximo sobreimpulso igual a 16.3 %.
2. Tiempo de establecimiento igual a 2 segundos.

Para realizar el diseño se proponen los siguientes pasos :

a) Calcular el valor de los polos dominantes en lazo cerrado que cumplen las especificaciones. Hallar el número de muestras por ciclo de la señal subamortiguada. ¿La respuesta del sistema discreto queda desvirtuada frente a la respuesta del sistema continuo análogo?.

b) Comprobar que la posición en el plano Z de los polos dominantes en lazo cerrado que cumplen las especificaciones son: $z_{1,2} = 0.77 \pm j0.278$

c) Si D(z)=1, comprobar que no es posible lograr para ningún valor de k los polos en lazo cerrado deseados en el plano Z.

d) Para cumplir estas especificaciones se introduce un control PD que resuelve la siguiente ecuación en diferencias: $y(n) = x(n) - a \cdot x(n-1)$. Determinar la función de transferencia del control, el valor de "a" y la ganancia k para conseguir los polos deseados en lazo cerrado.

e) Si se cambia el periodo de muestreo a T = 0.2 segundos, calcular el máximo sobreimpulso y el número de muestras por ciclo, sabiendo que uno de los polos en lazo cerrado se halla en z=0.4, manteniendo el valor de k y "a" calculados anteriormente. ¿La respuesta del sistema discreto queda desvirtuada frente a la respuesta del sistema continuo análogo?.

Solución :

a) Cálculo de los polos dominantes en lazo cerrado que cumplen las especificaciones 1 y 2.

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 2 \Rightarrow \sigma = 2;\ M_p = e^{-\sigma\cdot\pi/\omega_d} = e^{-\pi\cdot\xi/\sqrt{1-\xi^2}} = 0.163 \Rightarrow \omega_d = 3.4641$$

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d = -2 \pm j3.461$$

Número de muestras por ciclo: $\dfrac{\omega_s}{\omega_d} = \dfrac{2\pi/T}{\omega_d} = \dfrac{2\pi/0.1}{3.461} = 18.138$

Se obtienen más de 18 muestras por ciclo, lo que implica una buena representación del sistema continuo análogo.

b) Posición en el plano Z de los polos dominantes:

$$z = e^{Ts} = e^{-\sigma T} \cdot e^{\pm j\omega_d T} = e^{-\sigma T} \cdot [\cos(\omega_d T) \pm j \cdot \sin(\omega_d T)]$$

$$z_{1,2} = e^{-2 \cdot 0.1} \cdot [\cos(3.4641 \cdot 0.1) \pm j \cdot \sin(3.4641 \cdot 0.1)] = 0.77 \pm j0.278$$

c) Debe comprobarse que no es posible lograr para ningún valor de k los polos en lazo cerrado deseados en el plano Z con D(z)=1. Para ello se verifica que estos polos no pueden cumplir la condición de ángulo.

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{k}{(s+1) \cdot (s+2)}$$

$$G(z) = k \cdot (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{1}{s \cdot (s+1) \cdot (s+2)}\right]\Bigg|_{T=0.1} = \frac{k \cdot 0.00452 \cdot (z + 0.90485)}{(z - 0.90483) \cdot (z - 0.81873)}$$

Aplicando la condición de ángulo a este sistema:

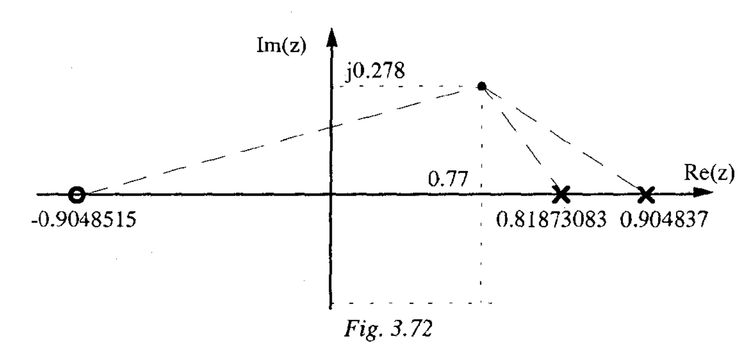


Fig. 3.72

$$\angle G(z)\big|_{z=0.77+j0.278} = \text{arctg}\frac{0.278}{0.90485 + 0.77} - 180^\circ + \text{arctg}\frac{0.278}{0.90483 - 0.77} - 180^\circ + \text{arctg}\frac{0.278}{0.81873 - 0.77}$$

$$\angle G(z)\big|_{z=0.77+j0.278} = -206.45^\circ \neq 180^\circ \Rightarrow z \notin LGR$$

En conclusión no existe ningún valor de k para el cual se obtengan estos polos en lazo cerrado.

d) La función de transferencia del PD que resuelve la ecuación en diferencias mencionada es :

$$y(n) = x(n) - a \cdot x(n-1) \xrightarrow{Z} Y(z) = X(z) - a \cdot z^{-1} \cdot X(z) \Rightarrow D(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z - a}{z}$$

Por lo que la función de transferencia resultante en lazo abierto :

$$GLA(z) = \frac{k \cdot 0.00452 \cdot (z-a) \cdot (z+0.90485)}{z \cdot (z-0.90483) \cdot (z-0.81873)}$$

Para que las raíces deseadas sean polos en lazo cerrado es necesario cumplir las condiciones de ángulo (pertenencia al lugar geométrico de las raíces) y módulo. La aplicación de estas condiciones proporcionará los valores apropiados de control introducido.

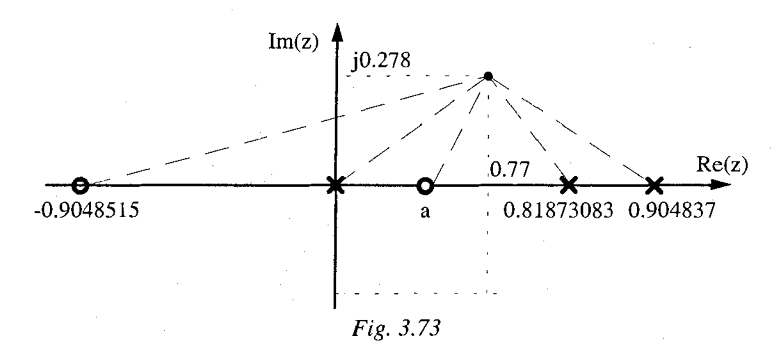


Fig. 3.73

Condición de ángulo:

$$\operatorname{arctg}\frac{0.278}{0.77-a} - \operatorname{arctg}\frac{0.278}{0.77} + \operatorname{arctg}\frac{0.278}{0.90485+0.77} - 180^{o} + \operatorname{arctg}\frac{0.278}{0.90483-0.77} -$$
$$-180^{o} + \operatorname{arctg}\frac{0.278}{0.81873-0.77} = \pm 180^{o} \Rightarrow a \cong 0.5$$

Aplicando la condición de módulo se obtiene: $k \cong 24$.

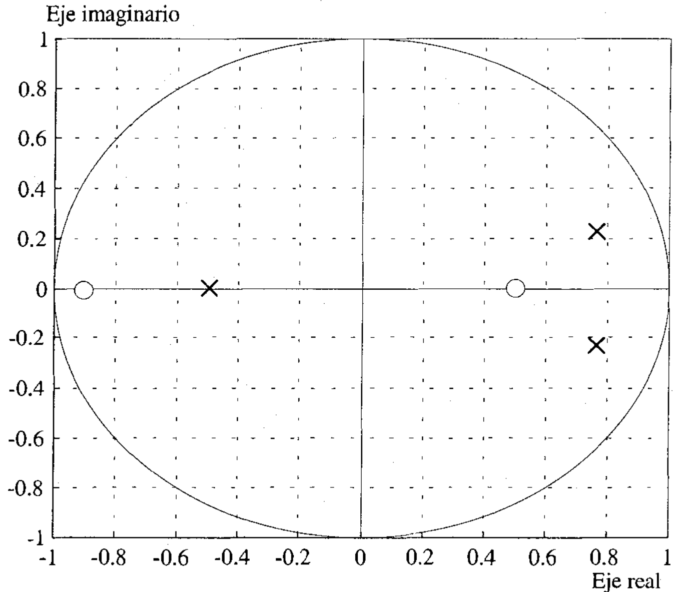


Fig. 3.74 Diagrama polo-cero en el plano z.

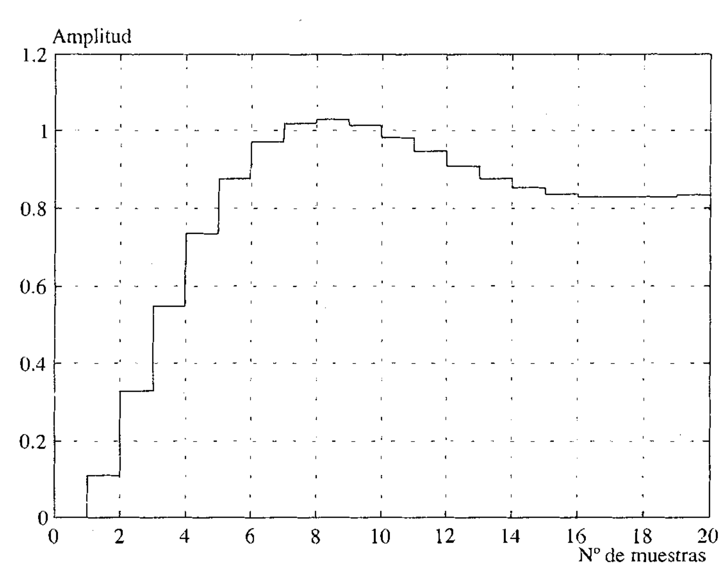


Fig. 3.75 Respuesta temporal en lazo cerrado del sistema con control PD.

La figura 3.74 muestra el diagrama polo-cero en plano Z en lazo cerrado del sistema diseñado. Puede observarse como se obtiene una respuesta en lazo cerrado que verifica las condiciones de diseño impuestas al sistema, y como el número de muestras por ciclo es el esperado.

e) Al cambiar el periodo de muestreo la función de transferencia del sistema también variará.

$$G_{LA}(z) = k \cdot \left(1 - z^{-1}\right) \cdot Z\left[\frac{1}{s \cdot (s+1) \cdot (s+2)}\right]_{T=0.2} \cdot \frac{z-a}{z} = \frac{24 \cdot 0.0164292 \cdot (z-0.5) \cdot (z+0.81873)}{z \cdot (z-0.67032) \cdot (z-0.81873)}$$

Ecuación característica:

$$G_{LA}(z) + 1 = 0 \Rightarrow z^3 - 1.0947501 \cdot z^2 + 0.6744901 \cdot z - 0.1614144 = 0$$

Conociendo que una raíz se encuentra en z = 0.4:

$$z^3 - 1.0947501 \cdot z^2 + 0.6744901 \cdot z - 0.1614144 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_{1,2} = 0.3473751 \pm j0.5252815 \\ z = 0.4 \end{cases}$$

Polos dominantes en lazo cerrado:

$$z_{1,2} = 0.34737501 \pm j0.5252815 = e^{-\sigma T} \cdot \left[\cos(\omega_d T) \pm j \cdot \sin(\omega_d T)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \omega_d T = \dfrac{0.5252815}{0.3473751} \Rightarrow \omega_d = 4.9325489 \\ e^{-2\sigma T} = (0.3473751)^2 + (0.5252815)^2 \Rightarrow \sigma = 2.31213 \end{cases}$$

$$\Rightarrow s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d = -2.31213 \pm j4.9325489$$

Obtención del m

Número de mue

Se obtiene poco
respuesta tempo
máximo sobreim

Ejemplo 3.11

Se quiere aplica
especificación de

Al no tener polos
que sería posible

Operando sobre e

Como la especific
como diseño se pu

Igualando coeficie

Obtención del máximo sobreimpulso:

$$Mp = e^{-\sigma\cdot\pi/\omega_d} = e^{-\pi\cdot\xi/\sqrt{1-\xi^2}} = 0.23 \Rightarrow Mp(\%) = 23\ \%$$

Número de muestras por ciclo:

$$\frac{\omega s}{\omega d} = \frac{2\pi/T}{\omega d} = \frac{2\pi/0.2}{4.9325489} = 6.369$$

Se obtiene poco más de 6 muestras por ciclo; por ello la señal empieza a desvirtuarse respecto a la respuesta temporal del sistema continuo equivalente; esta es la razón de que haya aumentado el máximo sobreimpulso respecto al caso anterior.

Ejemplo 3.11

Se quiere aplicar un control PID discreto al mismo sistema del ejemplo 3.2, donde se cumpla la especificación de un coeficiente estático de velocidad kv = 5. Se conoce del ejemplo 3.2 que:

$$G_p(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)} \quad ; \qquad T = 0.1 \text{ seg.};$$

$$G_{oh}G_p(z) = \frac{4.52\cdot 10^{-2}(z+0.9048)}{(z-0.9048)(z-0.8187)}$$

Al no tener polos en z = 1, la planta en sí no consigue un error en régimen estacionario nulo, lo que sí que sería posible con el control PID. Analizando el error en régimen estacionario de velocidad :

$$k_v = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{T}\cdot G_{LA}(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{T}\cdot G_{PID}(z)\cdot G_{oh}G_p(z)$$

Operando sobre esta ecuación :

$$k_v = \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2T}\cdot 2k_iT^2\cdot\frac{0.0452\cdot 1.9048}{0.09052\cdot 0.1813} = 5.25k_i$$

Como la especificación es kv = 5, entonces $k_v = 5 = 5.25k_i$ y se obtiene ki = 0.9523. Por otro lado, como diseño se puede aplicar el método de cancelación polo-cero :

$$z^2 + \frac{k_iT^2 - 2k_pT - 4k_d}{k_iT^2 + 2k_pT + 2k_d}\cdot z + \frac{2k_d}{k_iT^2 + 2k_pT + 2k_d} = (z-0.9048)(z-0.8187)$$

$$\cong z^2 - 1.724z + 0.741$$

Igualando coeficientes :

$$\frac{2k_d}{k_iT^2 + 2k_pT + 2k_d} = 0.741 \quad ; \qquad \frac{k_iT^2 - 2k_pT - 4k_d}{k_iT^2 + 2k_pT + 2k_d} = -1.724$$

De este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se deducen los valores de $k_p = 1.4$ y $k_d = 0.415$. La expresión del controlador y la función de transferencia de lazo abierto son :

$$G_{PID}(z) = 5.8\ \frac{(z-0.9048)(z-0.818)}{z\cdot(z-1)}$$

$$G_{LA}(z) = G_{PID}(z)\cdot G_{oh}G_p(z) = \frac{0.263(z+0.9048)}{z\cdot(z-1)}$$

Tal como muestra el LGR discreto, fig. 3.76, para el valor de kp calculado, los polos de lazo cerrado están dentro del círculo unitario, por lo que el diseño es estable.

$$z_{1,2} = 0.369 \pm 0.319j$$

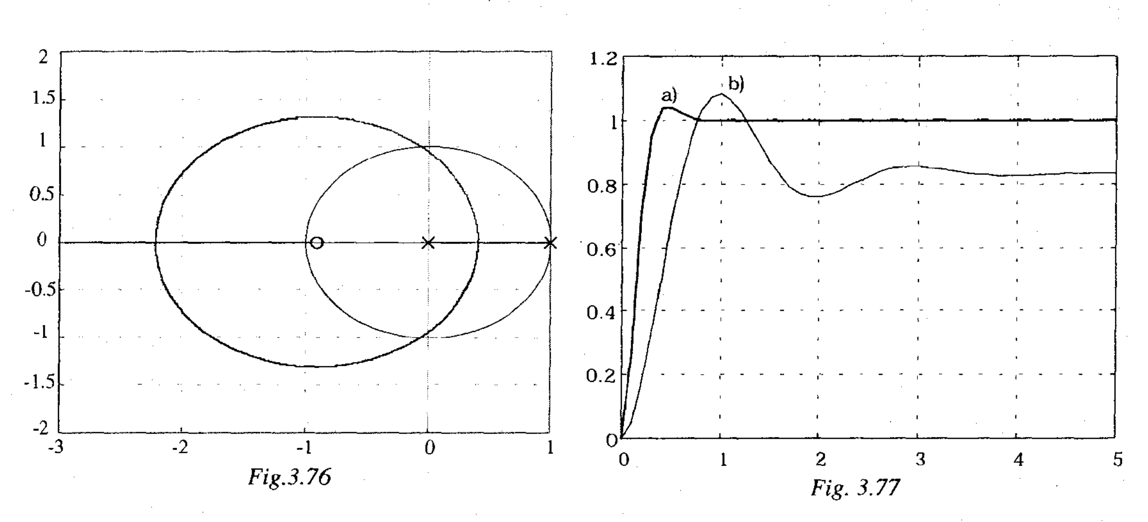


Fig.3.76 *Fig. 3.77*

Según la figura 3.77, se puede observar que el máximo sobreimpulso está limitado al 4 %, y que el tiempo de subida queda reducido considerablemente respecto de la respuesta temporal sin control de lazo abierto.

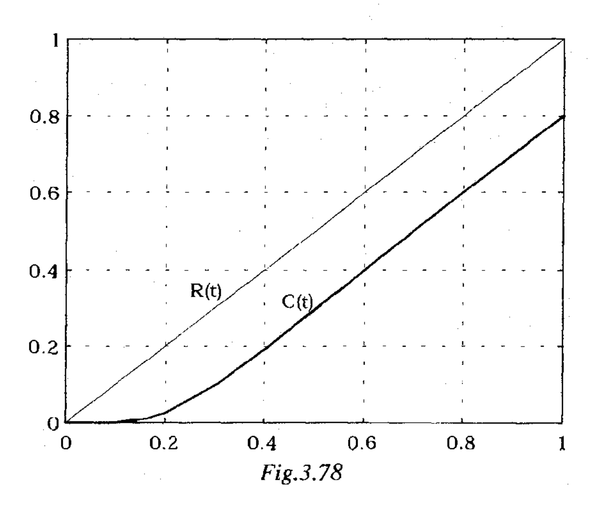


Fig.3.78

3.12 Problem

Problema 1

El sistema de
convenienteme



Donde :

Rt = Resister

Ct = Capacid

qi = Calor ce

El sistema de la

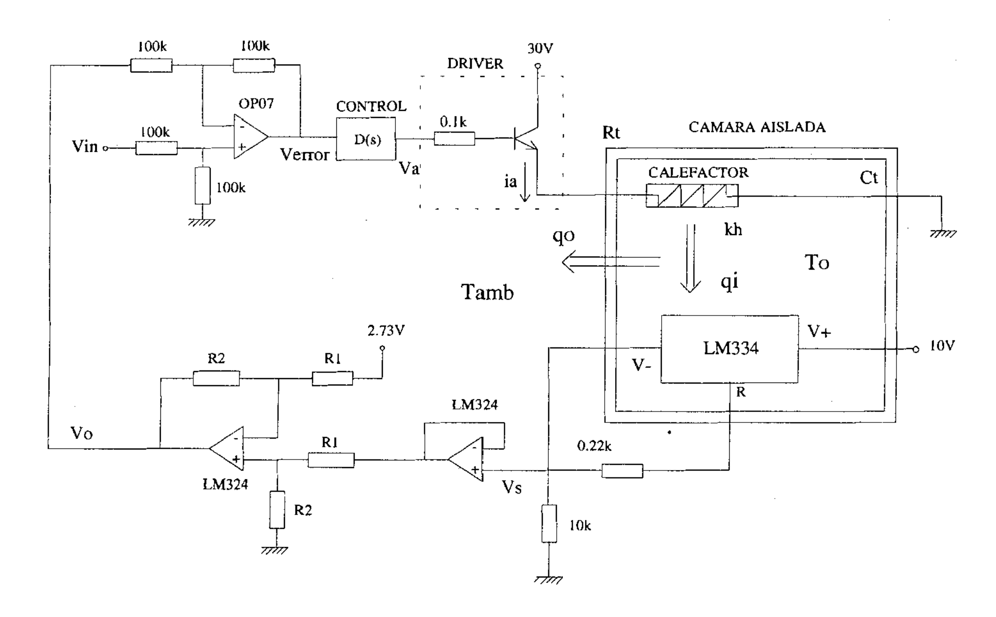
Vin

1.- Teniendo en c

3.12 Problemas

Problema 1

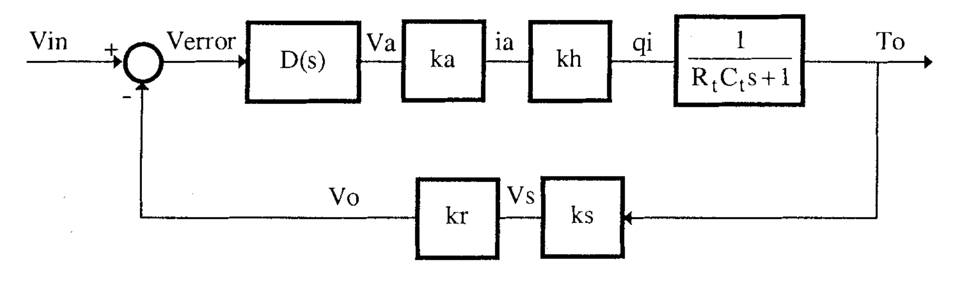
El sistema de la figura es un control de la temperatura en el interior de una cámara cerrada y convenientemente aislada del exterior mediante un recubrimiento isotérmico.



Donde :

Rt = Resistencia térmica de la cámara.
Ct = Capacidad térmica de la cámara.
qi = Calor cedido por el calefactor.
qo = Calor cedido al exterior (a través de las paredes).
To = Temperatura en el interior de la cámara.
Tamb = Temperatura ambiente.

El sistema de la figura anterior se representa mediante el siguiente diagrama de bloques:



1.- Teniendo en cuenta que se usa el LM334 como sensor de temperatura, cuyas características son:

- Sensibilidad en el punto Vs = 10mV/°Kelvin.

- Margen operativo de temperaturas: de 0 °C a 70°C.

- Es lineal dentro del margen de temperaturas.

Nota : 0°C = 273 °K

1.1.- Dibujar qué partes del circuito corresponden a los bloques de realimentación definidos por **ks** y **kr**.

1.2.- Calcular el margen de tensiones de **Vs** teniendo en cuenta el margen de temperaturas y la sensibilidad del sensor LM334. Dar la expresión matemática que define el comportamiento de Vs en función de la temperatura en °C.

1.3.- Calcular el valor de la ganancia **ks** del sensor.

1.4.- Con el fin de adecuar el margen de tensiones que entrega el sensor en Vs, al margen de tensiones de entrada (de 0 a 5 voltios), calcular el valor de la ganancia **kr** e indicar a que cociente de resistencias corresponde.

1.5.- Explicar el funcionamiento del circuito correspondiente al apartado 1.1.

2.- Si se conoce que τ=Rt·Ct=625 seg. es la constante de tiempo de la cámara y que kh = qi/ia = 0.25, ka = ia/Va = 2, y ks·kr ≈ 0.07142. Calcular:

2.1.- Para D(s) = 1 el error en régimen estacionario de posición del sistema.

2.2.- El tiempo de establecimiento $\mathbf{t_s}$ y el máximo sobreimpulso en *lazo abierto* del sistema.

2.3.- Con el fin de acelerar la respuesta temporal del sistema , diseñar un control PI para que se cumplan las especificaciones de $M_p = 5\%$, $t_s = 7$ minutos y $e_{ssp}=0$.

Si se considera , a partir de este apartado, que la respuesta dinámica del sensor es :

$$G(s)_{LM334} = \frac{1}{\tau_s \cdot s + 1} \qquad \text{Con} \quad \tau_s = 20 \text{ seg.}$$

3.- Dada la constante del tiempo del sensor, comentar si puede tener efecto sobre la respuesta temporal del sistema realimentado. Razonar la respuesta.

Solución :

1.2.- Son 10mV por cada grado Kelvin, así que el margen de tensiones está entre 2.73V y 3.43V. Se debe pasar de grados centígrados a grados Kelvin. La expresión es la de una recta Vs=ks·°C + 2.73.

1.3.- El valor de ks es la misma sensibilidad del sensor ks=0.01 .

1.4.- Para adecuar el margen de tensiones de 0 a 5 voltios kr = 7.142 .

2.1.- El coeficie

en régimen estac

2.2.- $t_s = 3 \cdot \tau = 3$
primer orden.

2.3.- Las especif

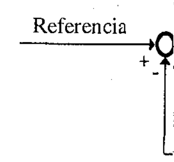
A través de la c

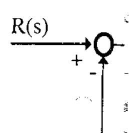
ganancia necesari

3.- Al ser un polo
efecto, pues está
tiempo de la plan
desprecia el efect

Problema 2

El sistema de con





Donde :

Se pretenden dise
$M_p = 10\%$, $t_s = 0.$

1.- Calcular el val

2.1.- El coeficiente estático de velocidad es $k_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = 0.5 \cdot 0.07142$, de forma que el error en régimen estacionario de posición es $e_{ssp} = 9655\%$

2.2.- $t_s = 3 \cdot \tau = 3 \cdot 625 = 1875$ seg. = 31.25 min. El sobreimpulso es cero por tratarse de un sistema de primer orden.

2.3.- Las especificaciones conducen al ajuste de un punto en el plano de Laplace :

$$s = -7.142 \cdot 10^{-3} \pm 7.5 \cdot 10^{-3}$$

A través de la condición de módulo y de ángulo se establece la posición del cero y el valor de la ganancia necesarios. El cero está en $a = 8.457 \cdot 10^{-3}$ y la ganancia vale $k=222$.

3.- Al ser un polo en realimentación, este polo se presenta como un cero del sistema. Este tendrá poco efecto, pues está bastante alejado del cero del PI. El sensor es mucho más rápido que las constantes de tiempo de la planta y por tanto no tiene efecto sobre ésta. Se dice que el sensor es transparente y se desprecia el efecto dinámico que tiene sobre la planta.

Problema 2

El sistema de control discreto de la figura 1 puede modelarse idealmente como muestra la figura 2 :

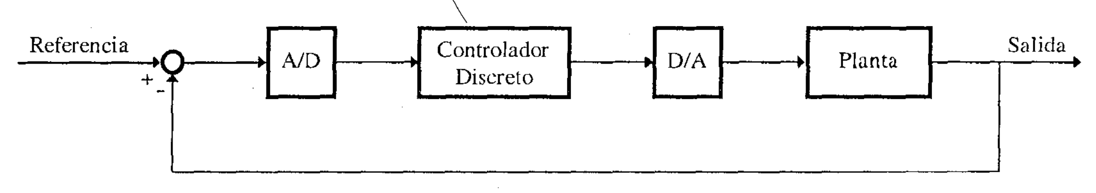


Fig. 1

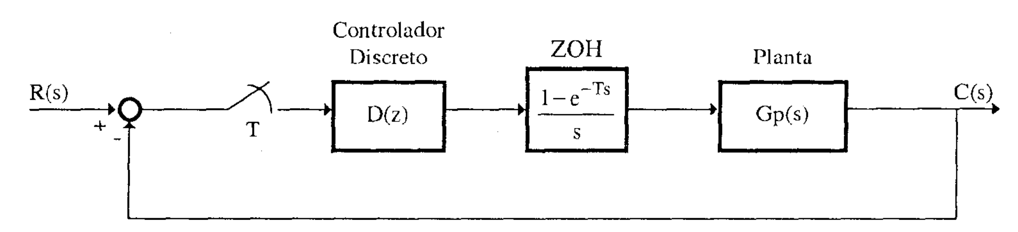


Fig. 2

Donde : $Gp(s) = \dfrac{36}{s \cdot (s+3.6)}$ $\qquad D(z) = k \cdot \dfrac{z-a}{z-b}$

Se pretenden diseñar los parámetros del sistema de control para obtener las especificaciones de $M_p = 10\%$, $t_s = 0.8$ seg y $e_{ssp} = 0$.

1.- Calcular el valor del periodo de muestreo necesario para obtener 20 muestras/ciclo.

2.- Si se escoge T=50 mseg., diseñar el controlador discreto D(z) para cumplir las especificaciones anteriores. Para ello, escoger el valor del parámetro **a** de modo que cancele adecuadamente uno de los polos de la planta.

3.- Los convertidores A/D y D/A introducen errores a la salida del sistema como consecuencia del error de cuantificación realizado en la conversión A/D y D/A, respectivamente. Dichos convertidores puede modelarse como muestra la figura 3.

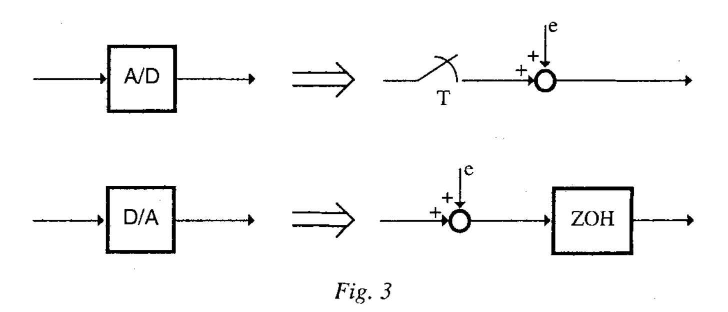


Fig. 3

El error máximo de cuantificación viene determinado por la expresión:

$$e_{max} = \frac{2^{-n}}{2}$$ donde "n" es el número de bits del convertidor.

Determinar el número de bits de los convertidores A/D y D/A para que el efecto del error máximo de cuantificación sobre la variable de salida sea menor del 0.6 %. Considérese una entrada de error tipo escalón de amplitud e_{max}.

4.- Obtener la codificación del coeficiente **b** si se realiza mediante una palabra binaria que utiliza 8 bits a la derecha de la coma fija, como se muestra en el ejemplo siguiente:

$$(0.11000001)_2 = b_7 \times \frac{1}{2} + b_6 \times \frac{1}{4} + b_5 \times \frac{1}{8} + \ldots + b_0 \times \frac{1}{2^8} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^8}\right)_{10} = (0.75390625)_{10}$$

¿Cree suficiente la resolución obtenida con 8 bits? Razonar la respuesta.

Solución:

1.- Elección del periodo de muestreo para obtener 20 muestras/ciclo:

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 0.8 \text{ seg} \Rightarrow \sigma = 5\,; \quad Mp = e^{-\pi\sigma/\omega_d} = 0.1 \Rightarrow \frac{\sigma}{\omega_d} = 0.732935 \Rightarrow \omega_d = 6.82188$$

polos en lazo cerrado deseados: $s_{1,2} = -5 \pm j \cdot 6.82188$

$$\text{Número de muestras/ciclo} = \frac{T_d}{T} = \frac{2\pi / \omega_d}{T} = 20 \Rightarrow T = 46 \text{ mseg.}$$

2.- Diseño de la red controladora:

$$D(z) = k\cdot\frac{z-a}{z-b}$$

No se puede cancelar el polo en z=1 porque es el responsable de anular el error estacionario, por ello: a=0.835702; como se comprueba a continuación:

$$G(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{36}{s\cdot(s+3.6)}\right] = (1-z^{-1})\cdot Z\left[\frac{36}{s^2\cdot(s+3.6)}\right]$$

$$G(z) = \frac{10\cdot(0.0152703\cdot z+0.0143811)}{3.6\cdot(z+1)(z-0.8352702)} = \frac{4.241725\cdot 10^{-2}\cdot(z+0.9417781)}{(z-1)\cdot(z-0.8352702)}$$

Debe observarse que es necesario realizar el diseño del controlador porque puede calcularse la respuesta del sistema en lazo cerrado sin control obteniéndose :

Polos en lazo cerrado : $z_{1,2} = 0.8964265 \pm j\cdot 0.2676517$

$$z = e^{Ts} = e^{-\sigma T}\cdot[\cos\omega dT \pm j\cdot \text{sen}\omega dT]$$

$$\left.\begin{array}{l} Re[z] = e^{-\sigma T}\cdot\cos\omega dT \\ Im[z] = e^{-\sigma T}\cdot\text{sen}\omega dT \end{array}\right\} \quad tg\omega dT = \frac{Im[z]}{Re[z]}; \quad e^{-\sigma T} = \sqrt{Re^2[z]+Im^2[z]}$$

$$tg\omega dT = \frac{0.2676517}{0.8964265} \Rightarrow \omega d = 5.803\ ; \quad e^{-\sigma T} = \sqrt{(0.2676517)^2+(0.8964265)^2} \Rightarrow \sigma = 1.3328$$

Polos en Lazo Cerrado en plano de Laplace : $s_{1,2} = -1.3328 \pm j\cdot 5.803$

Obteniendo una respuesta transitoria de parámetros :

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 3\ \text{seg} \qquad M_p = e^{-\pi\sigma/\omega d} = 0.486 \Rightarrow 48.6\%$$

La figura 4 muestra la respuesta temporal del sistema en lazo cerrado sin control, donde pueden verificarse las características dinámicas previstas.

Diseño:

Polos en lazo cerrado deseados : $z_{1,2} = 0.7339335 \pm j\cdot 0.2605531$

Aplicando condición de módulo y condición de ángulo se obtendrán los parámetros **b** y **k**, solución del diseño.

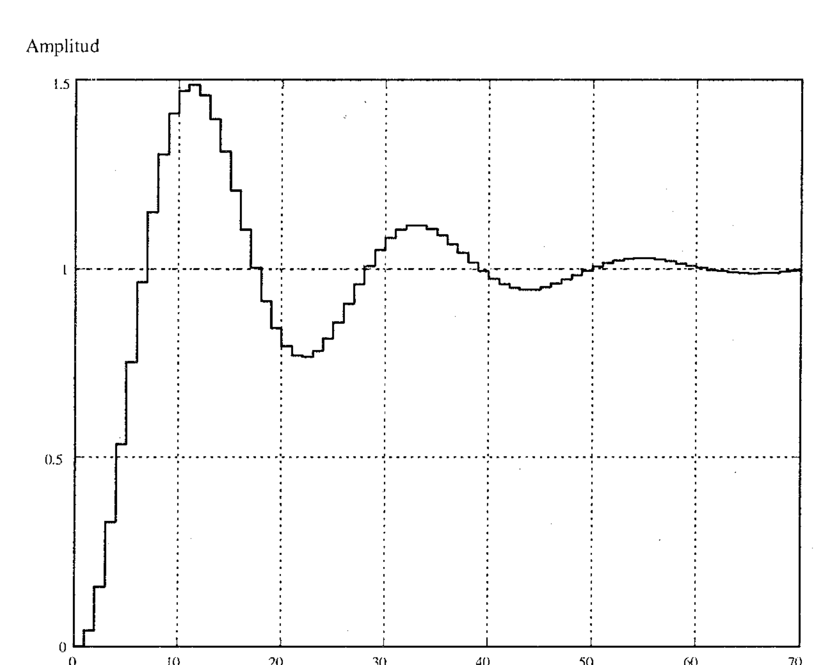

Amplitud
1.5
1
0.5
0
0
10
20
30
40
50
60
70
Nº de muestras

Fig. 4

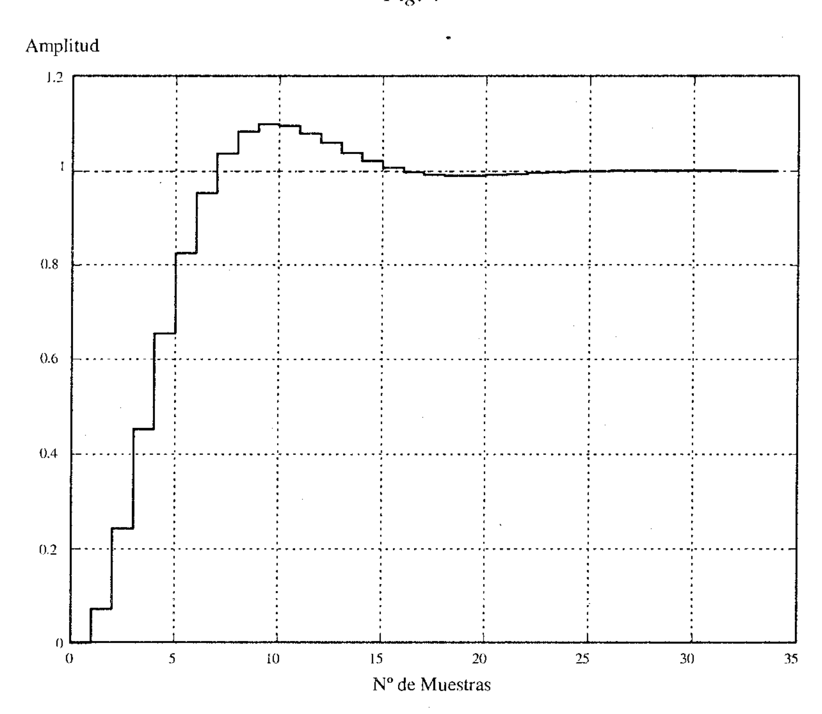

Amplitud
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
5
10
15
20
25
30
35
Nº de Muestras

Fig. 5

Condición de ángulo :

$$\operatorname{arctg}\left[\frac{0.2695531}{0.7339335+0.9417781}\right]-\operatorname{arctg}\left[\frac{0.2695531}{0.7339335-b}\right]-180^{o}+\operatorname{arctg}\left[\frac{0.2695531}{1-0.7339335}\right]=\pm180^{o}$$

$$b=0.5392857$$

Condición de módulo :

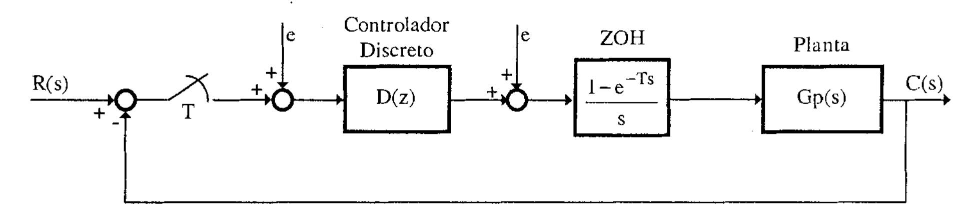
$$\frac{4.241725\cdot10^{-2}\cdot k\cdot\sqrt{(0.7339335+0.9417781)^{2}+0.2605531^{2}}}{\sqrt{(0.7339335-0.5392857)^{2}+0.2605531^{2}}\cdot\sqrt{(1-0.7339335)^{2}+0.2605531^{2}}}=1 \quad\Rightarrow\quad k=1.6837$$

Red controladora diseñada : $D(z)=1.6837\cdot\dfrac{z-0.8352702}{z-0.5392857}$

La respuesta del sistema de control diseñado se muestra en la figura 5.

3.- Estudio del error de cuantificación:

Sustituyendo los modelos de los convertidores D/A y A/D afectados por errores de cuantificación en la topología inicial, se obtiene el modelo del sistema total siguiente:



Como el sistema es lineal, puede aplicarse superposición. Considerando R(s)=0:

$$C(z)=G(z)\cdot\left[E(z)+D(z)\cdot\left[E(z)-C(z)\right]\right] \quad\Rightarrow\quad C(z)=\frac{G(z)\cdot(1+D(z))}{1+D(z)\cdot G(z)}\cdot E(z)$$

Dado que puede expresarse: $G(z)=\dfrac{Num}{Den}$; sustituyendo en la ecuación anterior resulta:

$$C(z)=\frac{Num\cdot(1+D(z))}{Den+D(z)\cdot Num}\cdot E(z)$$

Si la señal de error de cuantificación es tipo escalón de amplitud *e*, el valor en estado estacionario de la señal salida del sistema es:

$$css=\lim_{z\to1}\left(1-z^{-1}\right)\cdot C(z)=\lim_{z\to1}\left(1-z^{-1}\right)\cdot\frac{Num\cdot(1+D(z))}{Den+D(z)\cdot Num}\cdot\frac{e\cdot z}{z-1}$$

$$\text{css} = \lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{D(z)}+1\right)\cdot e = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-0.5392857}{1.6837\cdot(z-0.8352702)}+1\right)\cdot e \quad ; \qquad \text{dado que } \lim_{z\to 1}\text{Den} = 0\,.$$

$$\text{css} = 2.6610963\cdot e \le 0.006 \;\Rightarrow\; e \le 2.2547\cdot 10^{-3}$$

Como el error máximo de cuantificación es: $e_{max} = \dfrac{2^{-n}}{2} = 2^{-(n+1)}$; para n=8 $\Rightarrow 2^{-9} = 1.9537\cdot 10^{-3}$ y para n=7 $\Rightarrow 2^{-8} = 3..9063\cdot 10^{-3}$; en conclusión, se necesitan 8 bits en la conversión.

4.- Efecto de la codificación de coeficientes :

En el diseño se obtuvo b=0.5392857

Las posibilidades de codificación de este coeficiente con 8 bits son :

$$(0.10001010)_2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}\right)_{10} = (0.5390625)_{10}$$

$$(0.10001011)_2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}\right)_{10} = (0.5429688)_{10}$$

Planteando la ecuación característica resultante para cada uno de las dos posibilidades existentes puede verificarse que no existe una desviación importante respecto al caso diseñado; por esta razón, el sistema implementado responderá de modo similar al caso ideal, lográndose, por tanto, validar las especificaciones de diseño requeridas.

Problema 3

El método de discretización del mapeado polo-cero consiste en separar numerador y denominador de la función de transferencia G(s) a polos del filtro de tiempo discreto $G_D[z]$.

Considerando el filtro de tiempo continuo : G(s)= K(s+a), la zona de interés es el rango de bajas frecuencias.

Si se quiere obtener un filtro de tiempo discreto equivalente $G_D[z]$, utilizando el método del mapeado polo-cero ; para ello :

$$G_D[z] = K_D\frac{z-z1}{z-p1}$$

1.- Situar en el plano S los polos y ceros finitos de G(s). Transformar dichos puntos al plano Z.

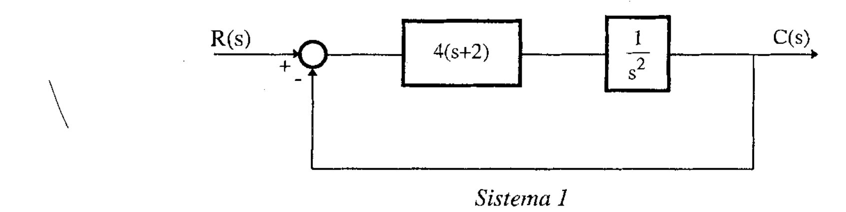
2.- Identifique si hay polos y/o ceros a frecuencia infinita ($\omega=\infty$). Conociendo que en el dominio discreto es equivalente la frecuencia infinita del plano S con la máxima frecuencia útil para que no se produzca aliasing, transformar las singularidades anteriores del plano S al Z.

3.- Ajustar la ganancia K_D del filtro de tiempo discreto de manera que coincida la ganancia en continua del filtro continuo con la ganancia en continua del filtro discreto, ya que nos interesa la zona de bajas frecuencias.

4.- Escriba la expresión completa del filtro discreto equivalente $G_D[z]$. Dar los valores de z1, p1, y K_D.

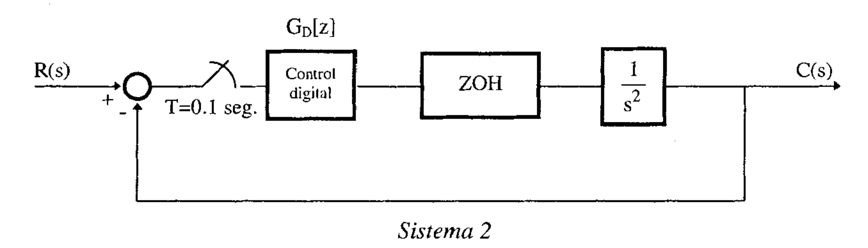
Utilizando ahora el método del mapeado para transformar un sistema de control continuo a control discreto.

Dado el sistema 1:



Sistema 1

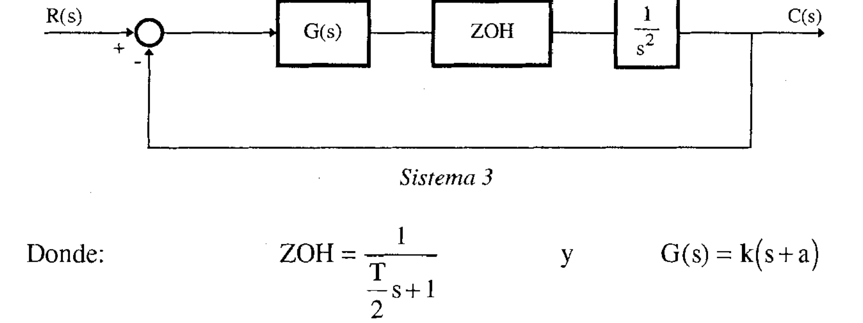
Se quiere encontrar un control discreto $G_D[z]$:



Sistema 2

Para ello :

a.- Encontrar el controlador analógico G(s) para que el sistema 3, al incluir un ZOH, tenga los polos dominantes en lazo cerrado en la misma posición que el sistema 1.



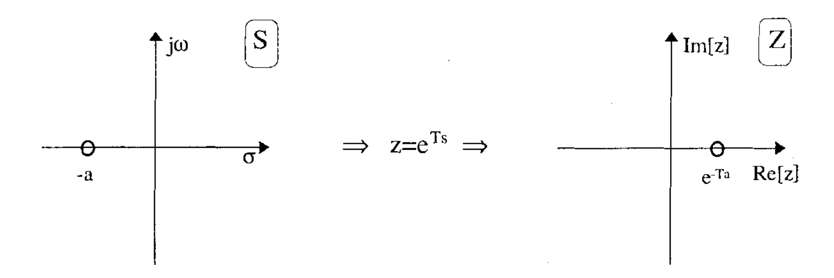
Sistema 3

Donde: $\qquad ZOH = \dfrac{1}{\frac{T}{2}s+1} \qquad$ y $\qquad G(s) = k(s+a)$

b.- Transformar G(s) a un controlador digital $G_D[z]$ mediante el método del mapeado polo-cero.

Solución :

1.- G(s) = k(s+a)



2.- Posee un polo en infinito. La máxima frecuencia que no presenta *aliasing* es $\omega = \frac{1}{2}\omega s = \frac{\pi}{T}$. Si transformando dicho punto al plano Z $\Rightarrow$ $z = e^{Ts} = e^{jT\frac{\pi}{T}} = e^{\pi j} = -1$

3.- $G_D(1) = G(0)$

$$G_D[z] = K_D \frac{z - e^{-aT}}{z+1} \qquad G_D(1) = K_D \frac{1-e^{-aT}}{1+1} = G(0) = aK \Rightarrow K_D = \frac{2aK}{1-e^{-aT}}$$

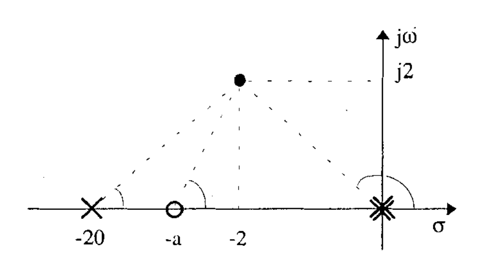
4.- $G_D[z] = \frac{2aK}{1-e^{-aT}} \frac{z-e^{-aT}}{z+1}$

a.- Condiciones dinámicas iniciales (sistema 1): $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4(s+2)}{s^2+4s+8} \quad \Rightarrow \quad$ Polos en $s_{1,2} = -2 \pm 2j$

Al añadir ZOH se modifican los polos en lazo cerrado, por lo que debe de calcularse la situación del cero del control para que los polos se mantengan en $s_{1,2} = -2 \pm 2j$

$$F_{LA} = K(s+a)\frac{20}{s+20}\frac{1}{s^2} \; ; \qquad ZOH = \frac{1}{0.05s+1} = \frac{20}{s+20}$$

Aplicando condición de ángulo :



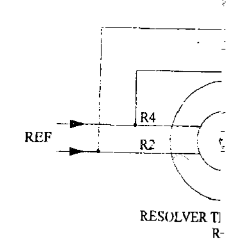
Para calcular K se

b.- Se transforma e

Para encontrar el v

Problema 4

El sistema Resolver
motores. Su funcion
en fase, cuya ampli
una señal externa. F
RDC (Resolver Dig



De este modo, se ob
posición angular actu

$$-135-135-6.34+\text{arctg}\frac{2}{a-2}=\pm 180 \Rightarrow a=1.77$$

Para calcular K se aplica condición de ángulo $\Rightarrow \dfrac{20\cdot K\cdot 2.013}{18.11\cdot 2.82^2}=1 \Rightarrow K=3.59$

$$Gc(s)=3.59(s+1.77)$$

b.- Se transforma el controlador analógico a digital :

$$G_D[z]=K\frac{z-e^{-1.77\cdot 0.1}}{z+1}=K\frac{z-0.83}{z+1}$$

Para encontrar el valor de K $\Rightarrow G_D(1)=G(0)$

$$K\frac{1-0.837}{1+1}=3.59\cdot 1.77 \Rightarrow K=77.96$$

$$G_D[z]=77.96\frac{z-0.837}{z+1}$$

Problema 4

El sistema Resolver es muy utilizado en aplicaciones industriales de control de posición y velocidad de motores. Su funcionamiento puede resumirse indicando que ofrece a su salida dos señales senoidales en fase, cuya amplitud depende del ángulo actual medido en el motor y cuya frecuencia depende de una señal externa. Para logra extraer la información de posición angular del motor se añade el sistema RDC (Resolver Digital Converter) al Resolver como muestra la figura 1.

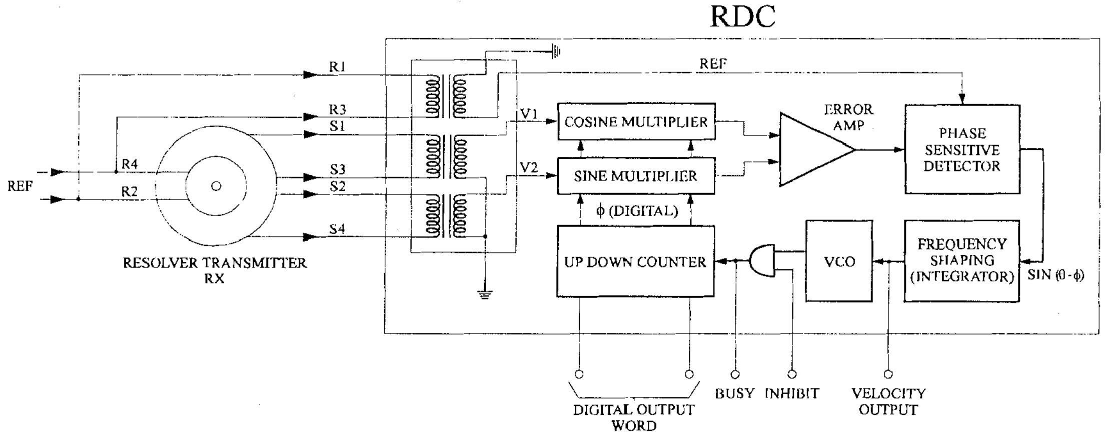
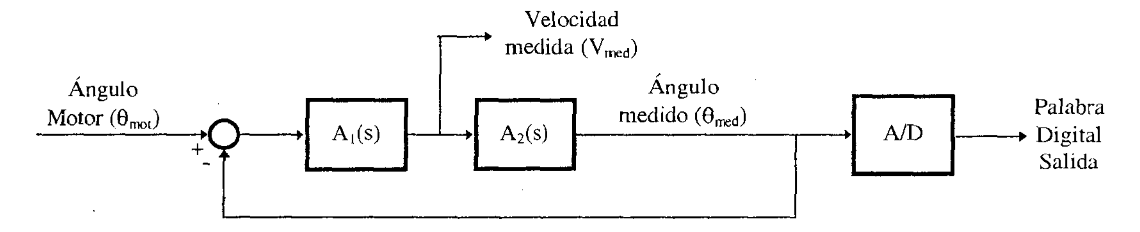


Fig. 1

De este modo, se obtiene a la salida del RDC una palabra digital que contiene la información de la posición angular actual del motor.

Conociendo que el sistema anterior puede modelarse en su conjunto por:



donde: $A1(s) = \frac{K1}{s} \cdot \frac{1+s \cdot t1}{1+s \cdot t2}$; $\quad A2(s) = \frac{K2}{s}$

1.- Obtener las funciones de transferencia : $\frac{\theta med(s)}{\theta mot(s)}$ y $\frac{V med(s)}{\theta mot(s)}$.

Calcular los valores estacionarios de ángulo y velocidad medidos para los casos:

$$\theta mot(s) = \frac{20}{s} \quad y \quad \theta mot(s) = \frac{1}{s^2}$$

2.- Razonar el funcionamiento del sistema Resolver-RDC. Comparar este sistema con un bucle de enganche de fase (P.L.L.).

3.- Calcular el número de bits necesarios para tener una resolución angular menor de 0.1°.

4.- Sabiendo que el contador del sistema RDC utiliza los pulsos generados por el VCO para determinar la posición angular del motor. ¿Cuántos pulsos se generan en una revolución del motor?. ¿Cuál es la velocidad máxima que puede seguir el sistema si la frecuencia máxima del VCO es de 1,536 MHz?.

A continuación, se desea estudiar un sistema de control de posición utilizando los sistemas anteriores tal y como muestra la figura 2.

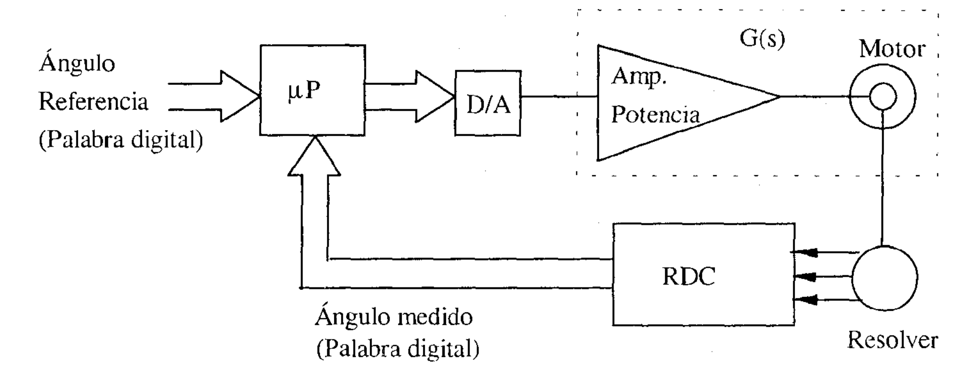
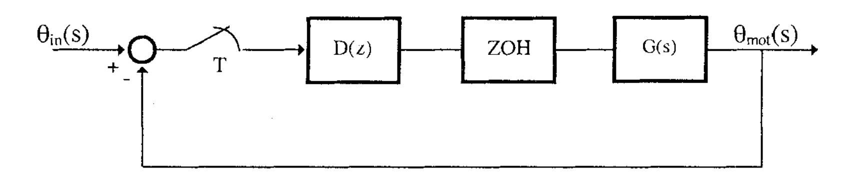


Fig. 2

Dado que el periodo de muestreo del sistema de control es de T=50 mseg y el tiempo de establecimiento del sistema Resolver-RDC es de 20 mseg, el diagrama de bloques equivalente de este sistema es:



donde: $G(s) = \dfrac{km}{s \cdot (Tm \cdot s + 1)}$ km=20 (ganancia del motor)

Tm=500 mseg (constante de tiempo del motor) D(z): control discreto a diseñar

5.- Seleccionar y diseñar el control discreto adecuado D(z) para obtener un tiempo de establecimiento de 1.2 segundos y un máximo sobreimpulso del 20 %. Determinar el número de muestras por ciclo. Razonar la elección del control y el diseño del mismo.

6.- Supóngase que el motor queda en vacío (sin carga) variando su constante de tiempo de 500 mseg a 5 mseg. Razonar las causas que proporcionan un mal funcionamiento del sistema de control. Determinar una solución al problema y dibujar el diagrama de bloques equivalente del sistema de control.

Solución:

1.- Funciones de transferencia:

$$\frac{\theta_{med}(s)}{\theta_{mot}(s)} = \frac{K_1 K_2 (1 + s \cdot t_1)}{s^2 \cdot (1 + s \cdot t_2) + K_1 K_2 (1 + s \cdot t_1)} \; ; \quad \frac{\theta_{med}(s)}{\theta_{mot}(s)} = \frac{K_1 \cdot s \cdot (1 + s \cdot t_1)}{s^2 \cdot (1 + s \cdot t_2) + K_1 K_2 (1 + s \cdot t_1)}$$

Valores estacionarios:

$$1. \; \theta_{med}(s) = \frac{20}{s}; \quad \theta_{med} = \lim_{s \to 0} s \frac{\theta_{med}(s)}{\theta_{mot}(s)} \frac{20}{s} = 20 \; ; \quad V_{med} = \lim_{s \to 0} s \frac{V_{med}(s)}{\theta_{mot}(s)} \frac{20}{s} = 0$$

$$2. \; \theta_{mot}(s) = \frac{1}{s^2}; \quad \theta_{med} = \lim_{s \to 0} s \frac{\theta_{med}(s)}{\theta_{mot}(s)} \frac{1}{s^2} = \infty \; ; \quad V_{med} = \lim_{s \to 0} s \frac{V_{med}(s)}{\theta_{mot}(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{K_2}$$

2.- El sistema Resolver-RDC permite obtener el valor de la posición angular del motor y un valor proporcional a su velocidad angular. En cuanto a su funcionamiento, se observa la presencia de un multiplicador de señal y un detector de fase que recuerda al comparador de fase de un PLL. Por otra parte, el integrador realiza una función paso-bajo garantizando la medida correcta de la velocidad del motor dado que el sistema tiene dos elementos integradores (el integrador y el VCO). Por último el contador ofrece el valor de la posición angular actual.

3.- Número de bits para resolución angular menor de 0.1°. Realizando pruebas :

$$11\ \text{bits} \rightarrow 2^{11} = 2048 \rightarrow \frac{360°}{2048} = 0.175° \; ; \qquad 12\ \text{bits} \rightarrow 2^{12} = 4096 \rightarrow \frac{360°}{4096} = 0.0878°$$

Se necesitan 12 bits para tener una resolución angular menor de 0.1°

4.- En una revolución se producen 4096 pulsos dado que el contador debe pasar por todas las combinaciones de 12 bits. De este modo la velocidad máxima que se puede seguir es :

$$1.536 \cdot 10^6\,\text{Hz} \cdot \frac{1}{4096\,{}^{\text{pulsos}}/_{\text{rev}}} = 375\text{rps}$$

5.- $t_s = \dfrac{4}{\sigma} \Rightarrow \sigma = 3.333 \; ; \quad M_p = e^{-\frac{\pi\sigma}{\omega_d}} = 0.2 \Rightarrow \omega_d = 6.5066$

$$z_{1,2} = e^{-\sigma T}\left[\cos\omega_d T \pm \sin\omega_d T\right] = 0.80208 \pm j0.27055$$

Número de muestras por ciclo: $\quad \dfrac{\omega_s}{\omega_d} = \dfrac{\frac{2\pi}{T}}{\omega_d} = 19$ muestras/ciclo

$$G_a(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G(s)\right] = \left(1-z^{-1}\right)Z\left[\frac{K_m}{s^2\left(T_m s+1\right)}\right]; \qquad G_a(z) = 4.8374 \cdot 10^{-2}\,\frac{z+0.9672}{(z-1)(z-0.9048)}$$

Control proporcional : $\quad z_{1,2} \in \text{LGR}\,?$

Condición de ángulo :

$$\text{arctg}\frac{0.2705}{0.8020+0.9672} - 180 + \text{arctg}\frac{0.2705}{1-0.8020} - 180 + \text{arctg}\frac{0.2705}{0.9048-0.8020} = 131.7° \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} \notin \text{LGR}$$

Control proporcional-derivativo : $\quad D(z) = K(z-a)$

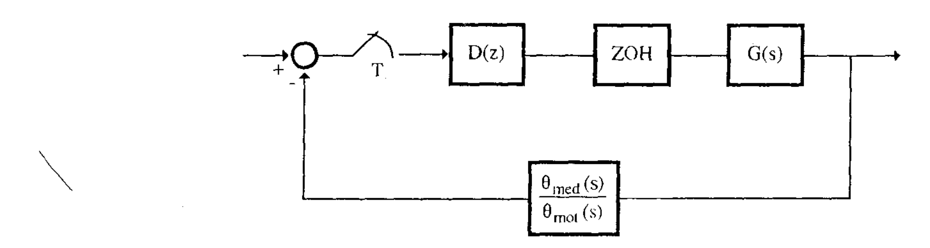
Condición de ángulo :

$$131{,}7 - \text{arctg}\frac{0.2705}{0.8020+a} = 180° \quad \Rightarrow \quad a = 0.5609$$

Condición de modulo:

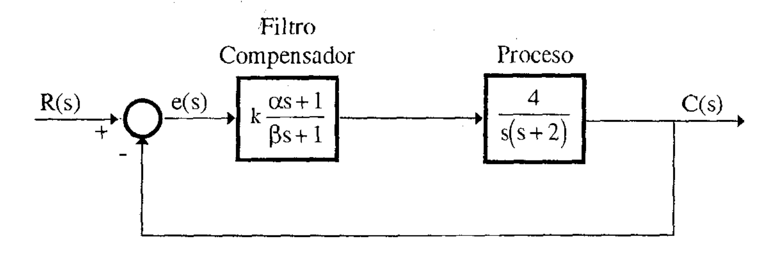
$$K \cdot 4.8374 \cdot 10^{-2}\,\frac{\sqrt{0.2705^2+(0.8020+0.9672)^2}\,\sqrt{0.2705^2+(0.8020-0.5609)^2}}{\sqrt{0.2705^2+(1-0.8020)^2}\,\sqrt{0.2705^2+(0.9048-0.8020)^2}} = 1 \Rightarrow K = 3.0948$$

f) Si la constante de tiempo del motor pasa de 500 mseg a 5 mseg, no se verificará la condición del número de muestras por ciclo al ser el periodo de muestreo de 50 mseg, apareciendo distorsión en la respuesta, lo cual conlleva un empeoramiento substancial de la dinámica del sistema. La solución al problema consiste en disminuir el periodo de muestreo para garantizar un número de muestras por ciclo elevado. Sin embargo, el control discreto debe rediseñarse porque deberá considerarse la dinámica asociada al sistema sensor (Resolver-RDC) debido a que el nuevo periodo de muestreo con toda seguridad será menor que el tiempo de establecimiento de dicho sistema que es de 20 mseg. El diagrama de bloques en esta situación resulta:



Problema 5

En la figura se muestra un sistema de control realimentado con una red de compensación y con una ganancia proporcional.



1.-Observando el lugar geométrico de las raíces del sistema, fig. 1, seleccionar el compensador de los conocidos (adelanto, retardo) de manera que se puedan cumplir las siguientes especificaciones :

- Tiempo de establecimiento de 2 seg.
- Coeficiente de amortiguamiento $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Razonar la respuesta.

2.- Calcular el valor de los parámetros α, β y k, de manera que se cumplan las especificaciones del apartado 1), utilizando el teorema de la constancia del LGR según el cual el sumatorio de los polos de lazo abierto es igual al sumatorio de los polos de lazo cerrado; para ello utilizar la situación mínima que permita tener dominancia.

$$\sum P_{LA} = \sum P_{LC}$$

Nota : Considerar situación de polos dominantes cuando la parte real de los polos no dominantes es tres veces mayor o igual que la parte real de los polos dominantes.

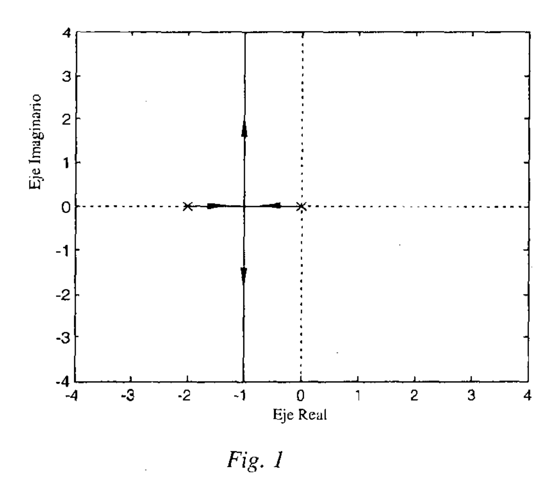
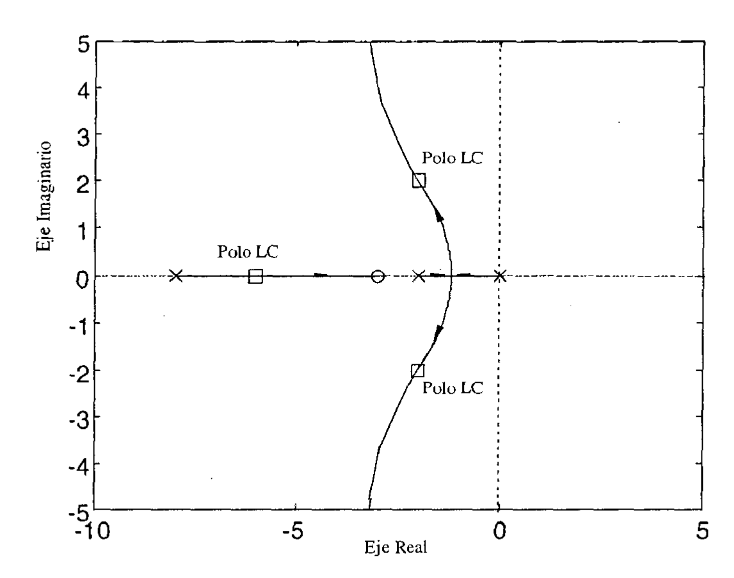


Fig. 1

Solución:

1.- Las especificaciones son de ts = 2seg. y $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ implican que los polos de lazo cerrado deben de estar ubicados en $s_{1,2} = -2 \pm 2j$; para conseguirlo se debe usar un compensador en adelanto para atraer a las ramas del LGR hacia esta posición.



2.- Según el LGR, si los polos de lazo cerrado deben estar en $s_{1,2} = -2 \pm 2j$, el tercer polo en lazo cerrado S_3, correspondiente al compensador en adelanto, deberá estar situado a una distancia de los polos $S_{1,2}$, tal que permita al menos la condición mínima de dominancia. Si σ_a es la distancia de los

polos $s_{1,2}$ al eje jω, y σ_b es la distancia del polo s_3 al eje jω, para que se cumpla dominancia :

$$\sigma_b = 3 \cdot \sigma_a$$

Por tanto según el teorema de la constancia :

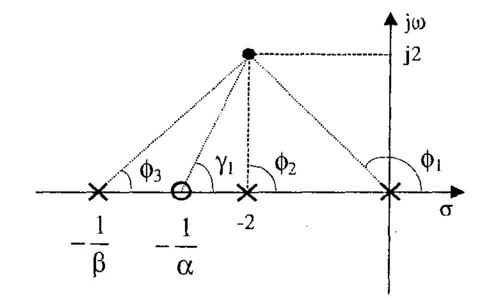
$$\sum P_{LA} = -\frac{1}{\beta} - 2 ; \qquad \sum P_{LC} = -2 \cdot \sigma_a - \sigma_b$$

Entonces :

$$\sum P_{LA} = -\frac{1}{\beta} - 2 = \sum P_{LC} = -2 \cdot \sigma_a - \sigma_b ; \quad -\frac{1}{\beta} - 2 = -2 \cdot \sigma_a - 3 \cdot \sigma_a = -5 \cdot \sigma_a$$

Como la condición de diseño implica que $\sigma_a = 2$: $\frac{1}{\beta} = 8$

Falta diseñar la posición del cero a través de la condición de ángulo:



Donde : $\phi_1 = 135°$, $\phi_2 = 90°$ y $\phi_3 = 18.43°$.

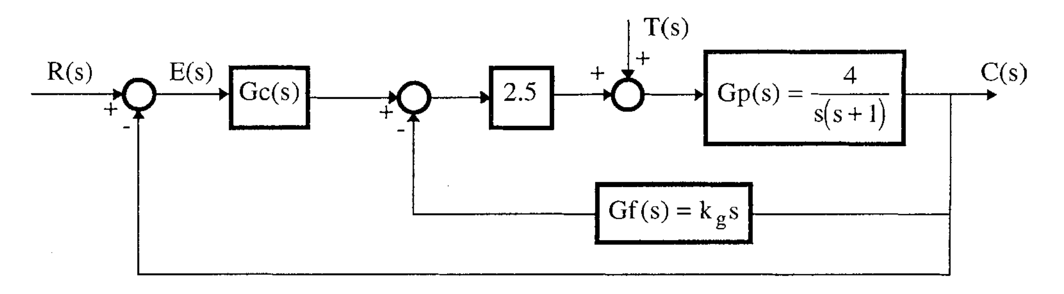
Luego γ_1 debe ser 63.43° para que se cumpla la condición de ángulo.

$$tg^{-1}\left(\frac{2}{\frac{1}{\alpha} - 2}\right) = 63.43° \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\alpha} = 3$$

El valor de la ganancia se calcula a través de la condición de módulo dando como resultado k=1.5

Problema 6

El siguiente diagrama de bloques representa un servomotor de posición que incorpora una compensación serie (bloque Gc(s)) y una compensación por realimentación de velocidad (bloque Gf(s)):



Donde T(s) es el par perturbador, R(s) es la entrada y k_g es una constante a determinar.

Se pide:

1.- Hallar las expresiones de las siguientes funciones de transferencia en función de Gc(s) y k_g.

$$G_1(s) = \left.\frac{C(s)}{R(s)}\right|_{T(s)=0} \qquad \text{y} \qquad G_2(s) = \left.\frac{C(s)}{T(s)}\right|_{R(s)=0}$$

2.- Suponiendo Gc(s) = k_c (constante a determinar), atendiendo a la expresión de $G_2(s)$ (con R(s)=0), determinar los valores de k_c y k_g de forma que, ante un par perturbador de tipo escalón unitario, el sistema presente un coeficiente de amortiguamiento de 0.5 y un error en régimen estacionario del 5% ante dicho par.

3.- Demostrar que la compensación por realimentación de velocidad no afecta al error en régimen estacionario. Razonar la respuesta.

4.- Calcular el error en régimen estacionario frente a una entrada R(s) del tipo escalón unitario, suponiendo T(s)=0.

5.- Gc(s) puede ser $Gc_1(s) = k_c + k_d \cdot s$ ó $Gc_2(s) = k_c + \dfrac{k_i}{s}$.

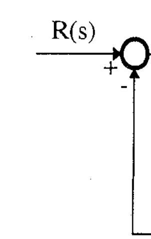
5.1.- Escoger razonadamente uno de los controles serie anteriores, de forma que el error en régimen estacionario e_{ss} frente a un par perturbador del tipo escalón unitario sea nulo.

5.2.- Para el control elegido y con los valores de k_c y k_g hallados en el apartado 2, determinar el rango de valores del parámetro restante (k_d ó k_i), para que el sistema sea incondicionalmente estable.

Solución:

1.- Funciones de transferencia:

Cuando T(s) = 0 se tiene una realimentación interna y una realimentación externa a la hora de encontrar la función de transferencia.

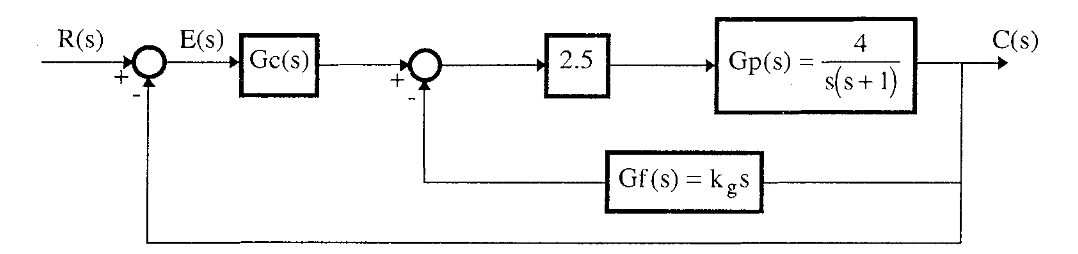


Aplicando reglas

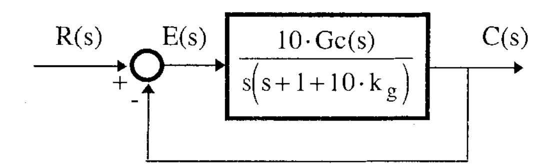
obteniendo como

Para el caso R(s)

La función de tra



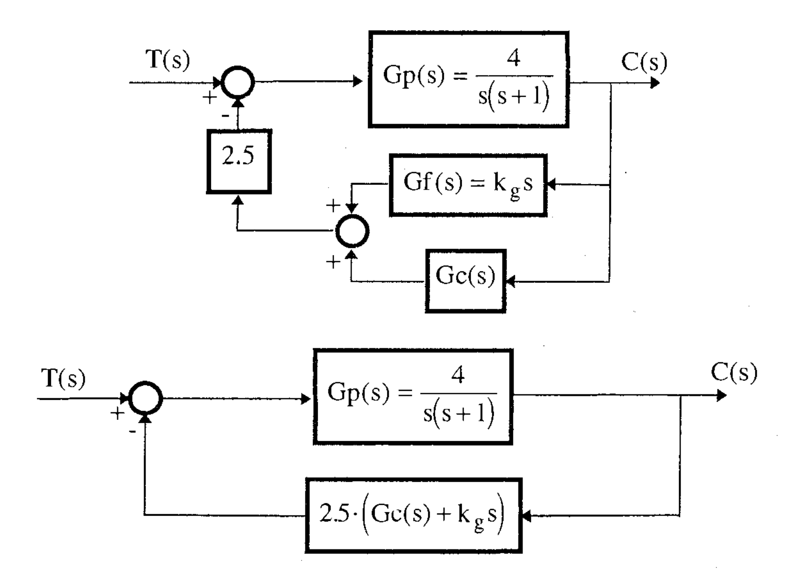
Aplicando reglas de álgebra de bloques:



obteniendo como resultado:

$$G_1(s) = \left.\frac{C(s)}{R(s)}\right|_{T(s)=0} = \frac{10\cdot Gc(s)}{s^2 + \left(1 + 10\cdot k_g\right)s + 10\cdot Gc(s)}$$

Para el caso R(s) = 0 se obtiene el siguiente diagrama de bloques:



La función de transferencia final resulta :

$$G_2(s) = \left.\frac{C(s)}{T(s)}\right|_{R(s)=0} = \frac{4}{s^2 + \left(1 + 10\cdot k_g\right)s + 10\cdot Gc(s)}$$

2.- $Gc(s) = k_c$:

$$G_2(s) = \left.\frac{C(s)}{T(s)}\right|_{R(s)=0} = \frac{4}{s^2 + \left(1 + 10 \cdot k_g\right)s + 10 \cdot k_c}$$

Si se expresa el denominador en forma normalizada:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + (1 + 10 \cdot k_g)s + 10 \cdot k_c$$

obteniendo:

$$\xi = \frac{1 + 10 \cdot k_g}{2 \cdot \sqrt{10 \cdot k_c}} = 0.5 \qquad \text{según la especificación del enunciado.}$$

Por otra parte, observando la estructura del diagrama de bloques se puede decir que $E(s) = -C(s)$, ya que $R(s) = 0$.

El valor estacionario de la salida frente a un par perturbador del tipo escalón unitario valdrá:

$$c_{ss} = \lim_{s \to 0} s \cdot C(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{4}{s^2 + \left(1 + 10 \cdot k_g\right)s + 10 \cdot k_c} \cdot \frac{1}{s} = \frac{4}{10 \cdot k_c}$$

$$e_{ss} = c_{ss} = \frac{4}{10 \cdot k_c} = 0.05 \qquad \text{según la especificación del enunciado.}$$

Notar que el error estacionario se debe medir en valor absoluto.

Con las dos ecuaciones planteadas se obtienen los valores:

$$k_c = 8 \qquad\qquad k_g = 0.79$$

3.- La realimentación de velocidad no afecta al estado estacionario porque, observando su función de transferencia, vemos que introduce un cero en origen (acción derivativa) y se encuentra en el lazo de realimentación. Debido a ello, en estado estacionario se puede suprimir este lazo. Calculando el valor en estado estacionario:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{4}{s^2 + \left(1 + 10 \cdot k_g\right)s + 10 \cdot k_c} \cdot \frac{1}{s}$$

El término procedente de la realimentación de velocidad ($k_g \cdot s$) se anulará al realizar el límite y no afectará al régimen estacionario.

4.- Cálculo del error en régimen estacionario frente a una entrada R(s) del tipo escalón unitario, con $T(s) = 0$.

El valor estacionario de la salida:

$$c_{ss} = \lim_{s\to0} s\cdot C(s) = \lim_{s\to0} s\cdot\frac{10\cdot Gc(s)}{s^2+\left(1+10\cdot k_g\right)s+10\cdot Gc(s)}\cdot\frac{1}{s}=1$$

En conclusión, el error en régimen estacionario es nulo.

5.- Se debe escoger entre un control proporcional derivativo y uno proporcional integral, para anular el error estacionario frente a un par perturbador del tipo escalón unitario. Se ha de recordar que el control integral introduce una singularidad en origen que permite anular el error estacionario. De este modo el control escogido es :

$$Gc(s) = k_c + k_i/s$$

Margen de valores de k_i para que el sistema sea estable:

Denominador de $G_2(s)$: $s^3 + 8.9s^2 + 80s + 10\cdot k_i = 0$

Aplicando CER :

* Condición necesaria: Todos los coeficiente presentes y positivos $\Rightarrow$ $k_i > 0$

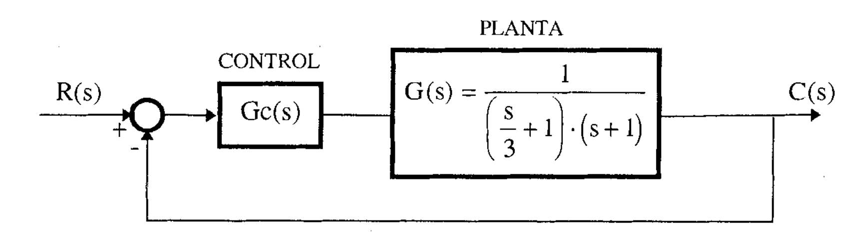
* Algoritmo de Routh:

$$\left(\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 80 \\ s^2 & 8.9 & 10\cdot k_i \\ s^1 & 80-1.12\cdot k_i & \\ s^0 & 10\cdot k_i & \end{array}\right)$$

Para que no existan cambios de signo en la primera columna, debe cumplirse: $k_i < 71.42$.

Problema 7

Dado el sistema de la figura :



1.- Para un control proporcional (Gc(s) = k):

1.1.- Dibujar el lugar geométrico de las raíces del sistema.

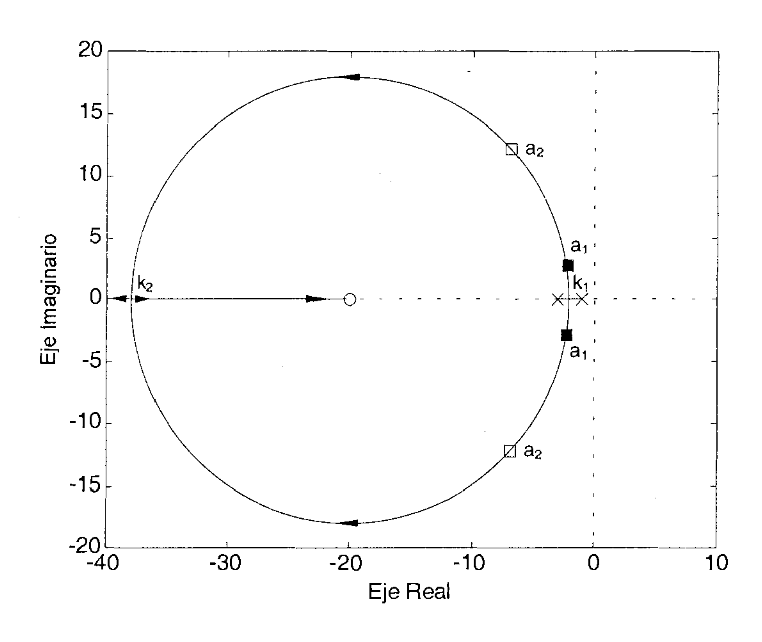
1.2.- Indicar qué variación debe seguir k para reducir el error estacionario de posición. Comprobar analíticamente.

1.3.- Si k varía en dicho sentido, ¿qué ocurrirá con el máximo sobreimpulso (Mp) del sistema?. Razonar la respuesta observando el LGR obtenido.

2.- Introduciendo un control proporcional-derivativo de la forma:

$$G_c(s) = k \cdot (1 + T_d \cdot s) = k \cdot (1 + 0.05 \cdot s)$$

El lugar geométrico de las raíces del sistema resultante es el que se muestra en la figura:

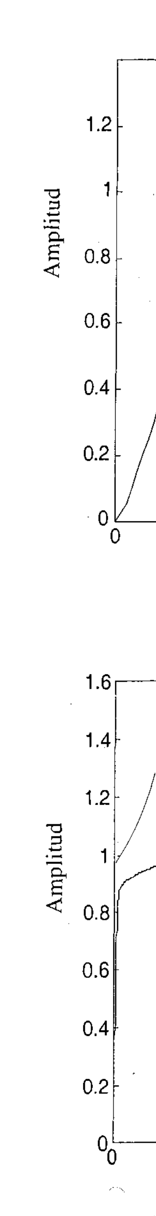


2.1.- Para este tipo de control, comentar, de forma cualitativa, la evolución que sigue el máximo sobreimpulso (Mp) al variar k desde $k=k_1$ hasta $k=k_2$. Razonar la respuesta.

2.2.- Para k=2, los polos en lazo cerrado se sitúan en la posición a_1 y para k=30 en la posición a_2. Relacionando los parámetros t_s, t_p, M_p y e_{ssp} con las posiciones de los polos en lazo cerrado, indicar qué figura (figura 1 ó figura 2) de respuesta temporal al escalón en lazo cerrado corresponde a k=2 y cual a k=30. Razonar la respuesta.

3.- Si el control es ahora del tipo proporcional integral derivativo:

$$G_c(s) = k \cdot \frac{T_i T_d \cdot s^2 + T_i \cdot s + 1}{s} = k \cdot \frac{1.2s^2 + 2s + 1}{s}$$



El lugar geomét

Para k=5, los p

3.1.- Para k=5, ¿

Dadas las figur

3.2.- ¿Qué gráfi

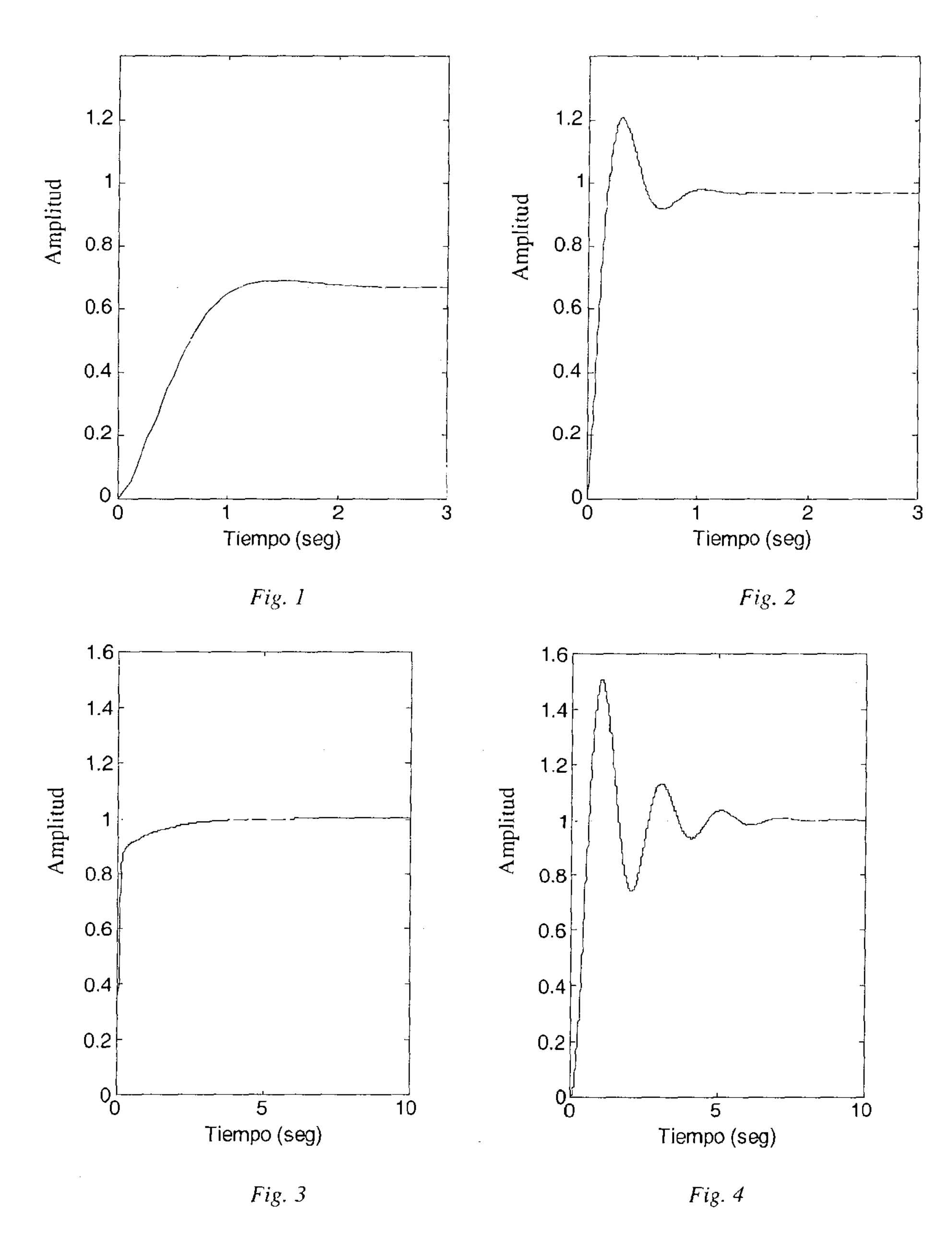


Fig. 1 *Fig. 2*

Fig. 3 *Fig. 4*

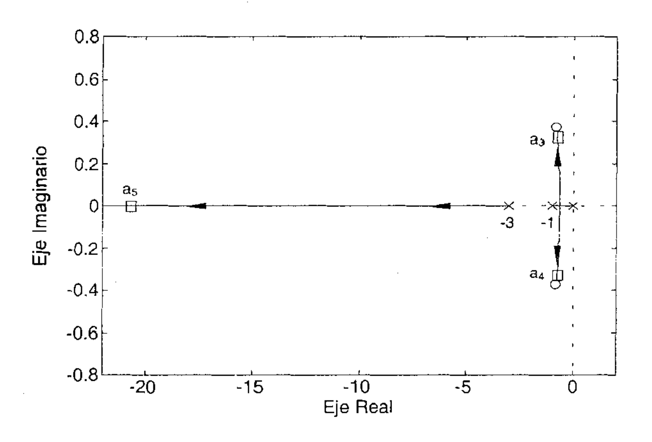
El lugar geométrico de las raíces del sistema con este control es el que se muestra en la figura 5.

Para k=5, los polos en lazo cerrado se sitúan en a_3, a_4 y a_5.

3.1.- Para k=5, ¿cuales serán los polos dominantes del sistema? Razonar la respuesta.

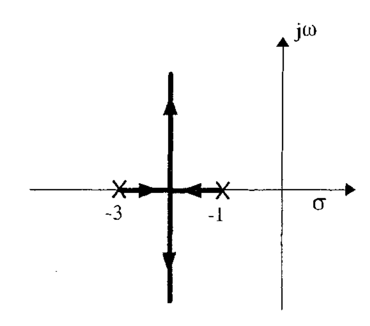
Dadas las figuras 3 y 4 de respuesta temporal al escalón en lazo cerrado :

3.2.- ¿Qué gráfica corresponde a la situación de los polos con ganancia k=5? Razonar la respuesta.



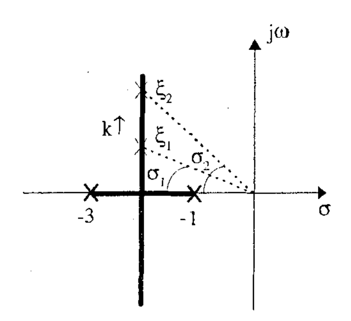
Solución:

1.1.- Punto de ruptura en s = -2. Asíntota a 90°.



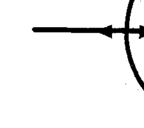
1.2.- $k_p = \lim_{s\to 0} G_{LA}(s) = k$ $\qquad e_{ssp} = \dfrac{1}{1+k_p} = \dfrac{1}{1+k}$ $\qquad$ Si k aumenta $\Rightarrow$ e_{ssp} disminuye.

1.3.- A medida que k aumenta, los polos se desplazan sobre la rama vertical (σ = -2), de manera que el ángulo θ aumenta, con lo que ξ disminuye ($\xi = \cos\theta$). En consecuencia el M_p aumentará.



$$M_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

2.1.- El M_p crecerá desde $k=k_1$ hasta alcanzar un valor máximo, desde el cual comenzará a decrecer hasta llegar a cero en $k=k_2$. El valor máximo se consigue para el punto en el cual la recta desde el origen es tangente a la circunferencia, es decir, cuando θ es máximo.



2.2.- La gráfica
(k=2), ya q

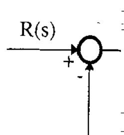
a.- La parte r
establecir

b.- La parte
mayor en

c.- El ángulo
> ξ_2, que

d.- Para los p
estacionar

3.1.- Se puede o
que se corre

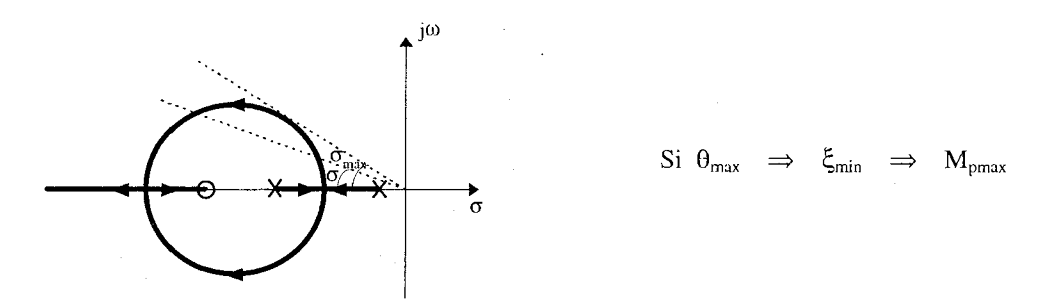


Raíces de

Raíces de

Por lo tanto, los
corresponden con

3.2.- El polo que
respuesta ter
coincide con



Si $\theta_{max} \Rightarrow \xi_{min} \Rightarrow M_{pmax}$

2.2.- La gráfica de respuesta temporal de la figura 1 se corresponde con la posición de los polos a_1 (k=2), ya que:

a.- La parte real de los polos en a_1 es inferior a la de los polos en a_2, en consecuencia el tiempo de establecimiento ($t_s = 4/\sigma$) será mayor para a_1.

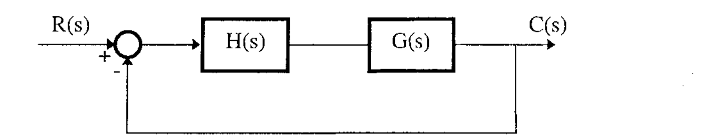
b.- La parte imaginaria de los polos en a_1 es inferior a la de los polos en a_2, con lo cual t_p será mayor en a_1.

$$t_p = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \; ; \qquad \beta = \mathrm{arctg}\frac{\omega_d}{\sigma}$$

c.- El ángulo θ de los polos en a_2 será mayor que el de los polos en a_1, lo que significará que $\xi_1 > \xi_2$, que a su vez implica $M_{pa1} < M_{pa2}$.

d.- Para los polos en a_1, el valor de k es inferior que para los polos en a_2, por lo tanto el error estacionario al escalón será mayor que en a_2.

3.1.- Se puede observar que los polos a_3 y a_4 se encuentran situados sobre los ceros de lazo abierto, que se corresponden con los ceros en lazo cerrado del sistema.



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Raíces de 1+G(s)H(s) ⇒ Polos de lazo cerrado.

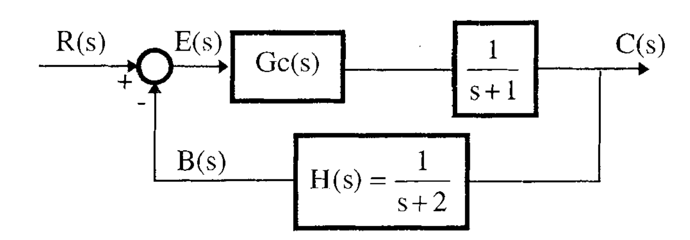
Raíces de G(s)H(s) ⇒ Ceros de lazo cerrado que coinciden con los ceros de lazo abierto.

Por lo tanto, los polos en lazo cerrado a_3 y a_4 se anularán con los ceros de lazo cerrado que se corresponden con los ceros de lazo abierto. En consecuencia, el polo dominante del sistema será a_5.

3.2.- ~~El~~ polo que tiene más influencia es a_5. Se observa que que dicho polo es real, por lo cual la respuesta temporal del sistema corresponderá a la de un sistema de primer orden. En este caso coincide con la figura 3.

Problema 8

Dado el sistema de la figura:



1.- Diseñar un control proporcional derivativo (Gc(s) = k·(s+a)), $e_{ssp} = \frac{1}{1+K_p} = 0.1111 = 11.11\%$ de forma que se cumplan las siguientes especificaciones :

- $M_p = 4.32\ \%$
- $t_s = 1.33$ seg.

2.- Calcular el valor del coeficiente estático de posición, así como el error estacionario de posición cometido.

3.- Dibujar el LGR del sistema diseñado. Indicar la posición de los polos en lazo cerrado del diseño y el valor de k asociado a los mismos.

4.- Dibujar la situación de todos los polos y ceros en lazo cerrado del sistema diseñado. ¿Podrá caracterizarse la respuesta transitoria según las especificaciones anteriores? ¿Por qué?

5.- Sabiendo que la expresión de la respuesta temporal del sistema diseñado frente a una entrada del tipo escalón unitario es:

$$c(t) = 1.77 \cdot u(t) + 2e^{-3t} \cdot (0.61\cos(3t) + 1.27\sin(3t)) \cdot u(t)$$

Obtener los valores de c(t) para los instantes $t = 0, 0.5, t_s, 2$ y 4 seg.

A la vista de los resultados :

- ¿Es viable el control PD en este sistema?.
- ¿Es H(s) transparente respecto al sistema?.
- Si se desea que H(s) no afecte a la respuesta temporal, ¿dónde debería estar situado el polo que introduce?

Solución:

1.-

Aplicando la cor

2.-

3.- El LGR queda

4.- Al tener un pol

Polos de laz

Ceros de laz

La presencia del ce

Solución:

1.-

$$\left.\begin{aligned} M_p &= 4.32\% \\ t_s &= 1.33 \text{ seg.} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad s = -3 \pm 3j$$

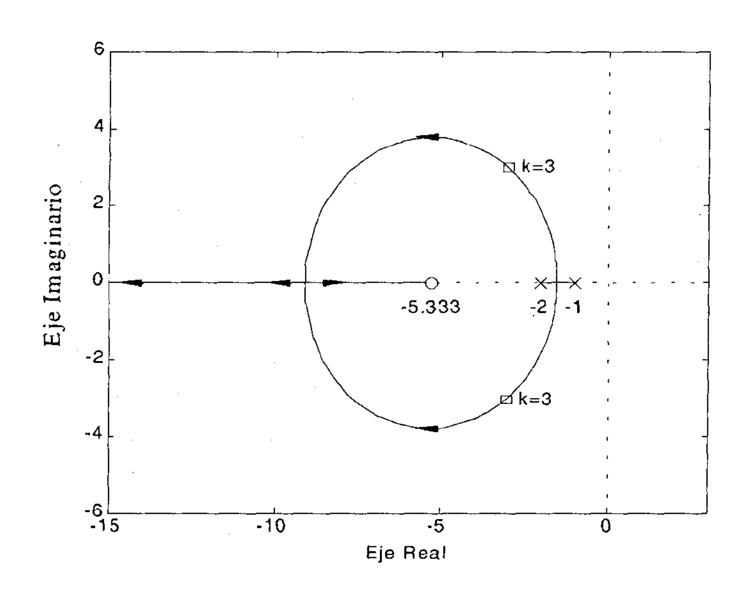
Aplicando la condición de ángulo, se obtiene a = 5.33, y mediante la condición de módulo k = 3.

2.-

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s)H(s) = \lim_{s \to 0} \frac{3 \cdot (s+5.33)}{(s+1) \cdot (s+2)} = 8$$

$$e_{ssp} = \frac{1}{1+K_p} = 0.1111 = 11.11\%$$

3.- El LGR queda de la forma:



4.- Al tener un polo en H(s), éste aparecerá como cero de lazo cerrado.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3(s+5.33)(s+2)}{(s+1)(s+2)+3(s+5.33)}$$

Polos de lazo cerrado en: $s_{1,2} = -3 \pm 3j$

Ceros de lazo cerrado en: $s_1 = -5.333$ y $s_2 = -2$

La presencia del cero es la causa de que la respuesta temporal sea totalmente distinta a la esperada.

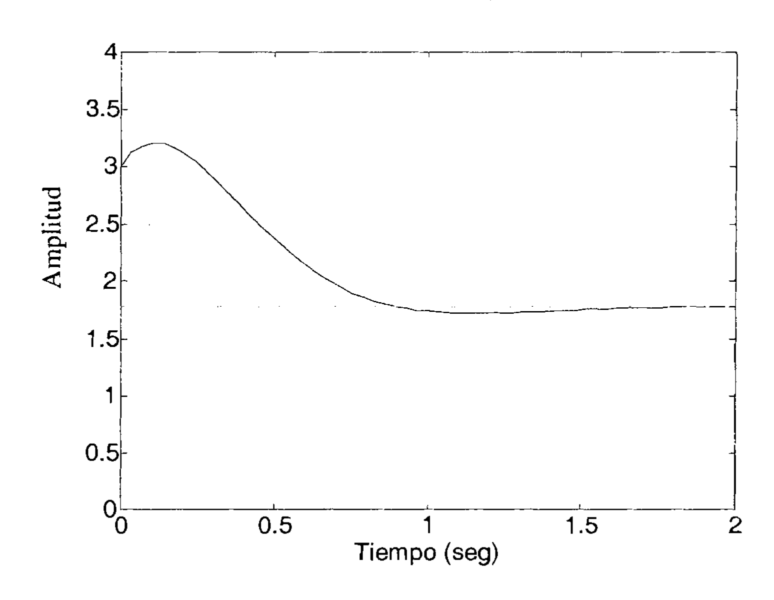


Fig. 1 Respuesta temporal al escalón, del sistema diseñado

5.-

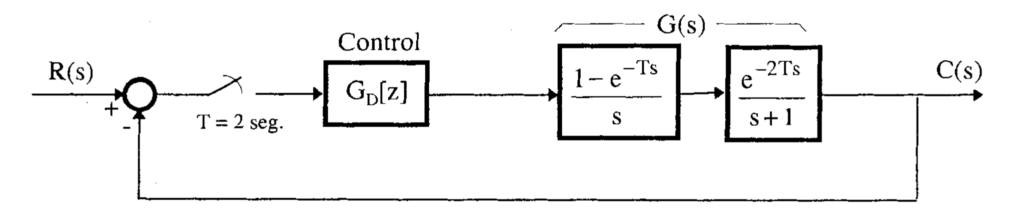
Instante t (seg.)	Amplitud de la respuesta
0	2.99
0.5	2.35
ts=1.33	1.72
2	1.77
4	1.77

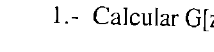
La gráfica de la respuesta temporal muestra el efecto que causa el cero. En consecuencia, el control PD no es viable en este caso.

H(s) no es, por tanto, transparente, y para que no afecte a la respuesta temporal, el polo que introduce deberá estar lo bastante alejado de las raíces de G(s) para que no modifique su respuesta.

Problema 9

Dado el siguiente sistema :





1.- Calcular G[z

2.- Encontrar la
del plano S d

Representar e

¿Qué zona de

3.- Se desea dise
muestras por c

Encontrar K_p y

Solución:

1.-

2.-

1.- Calcular G[z].

2.- Encontrar la figura que describe en el plano Z, en función de ω_n/ω_s, la transformación de puntos del plano S de coeficiente de amortiguamiento (ξ) constante.

Representar en el plano Z los siguientes puntos para $\xi = 0.5$:

a) $\frac{\omega_d}{\omega_s} = 0$ c) $\frac{\omega_d}{\omega_s} = 0.5$

b) $\frac{\omega_d}{\omega_s} = 0.25$ d) $\frac{\omega_d}{\omega_s} = 1$

¿Qué zona de la curva será útil en el diseño del sistema?

3.- Se desea diseñar un control PI tal que los polos en lazo cerrado tengan un $\xi = 0.5$ y el número de muestras por ciclo de la oscilación mantenida sinusoidal sea 10.

$$G_d[z] = K_p + K_i \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Encontrar K_p y K_i.

Solución:

1.- $$G[z] = TZ\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{e^{-2Ts}}{s+1}\right\} = (1-z^{-1})\cdot z^{-2}\cdot TZ\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \frac{0.864}{z^2(z-0.135)}$$

2.-

$$z = e^{Ts} = e^{T\cdot(-\xi\omega_n + j\omega_d)}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

$$z = e^{\frac{2\pi}{\omega_s}\xi\frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} + j\frac{2\pi}{\omega_s}\omega_d}$$

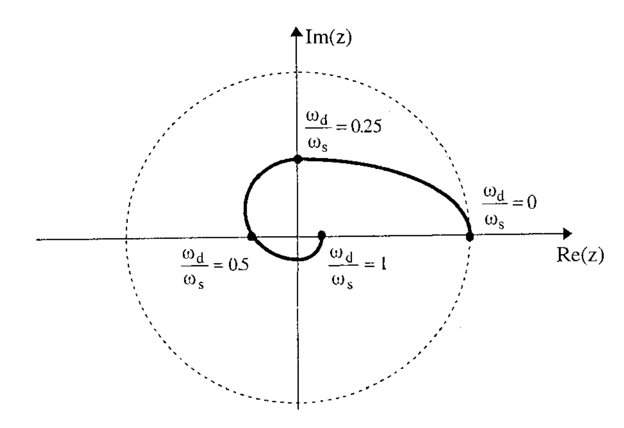
$$|z| = e^{\frac{-2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\frac{\omega_d}{\omega_s}}$$

$$\angle z = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}$$

Cálculo de los puntos con $\xi = 0.5$:

$$\frac{\omega_d}{\omega_s} = 0 \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \langle z = 0 \text{ rad} \end{cases} \qquad \frac{\omega_d}{\omega_s} = 0.25 \Rightarrow \begin{cases} |z| = 0.403 \\ \langle z = \pi/2 \text{ rad} \end{cases}$$

$$\frac{\omega_d}{\omega_s} = 0.5 \Rightarrow \begin{cases} |z| = 0.163 \\ \langle z = \pi \text{ rad} \end{cases} \qquad \frac{\omega_d}{\omega_s} = 1 \Rightarrow \begin{cases} |z| = 0.0265 \\ \langle z = 0 \text{ rad} \end{cases}$$



La zona útil será desde $\omega_d / \omega_s = 0$ hasta $\omega_d / \omega_s = 0.5$, ya que se cumple el criterio de Nyquist.

3.-

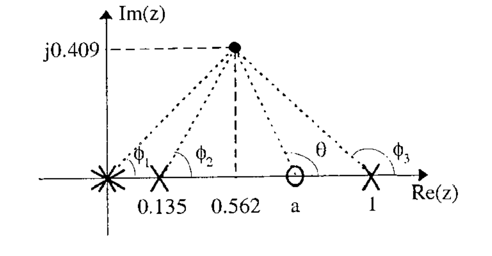
$$G_D[z] = K_p + K_i \frac{1}{1 - z^{-1}} = (K_p + K_i)\frac{z - \dfrac{K_p}{K_p + K_i}}{z - 1} = K \cdot \frac{z - a}{z - 1}$$

$$K_p + K_i = K$$

$$\frac{K_p}{K_p + K_i} = a$$

$$\frac{T_d}{T} = 10 \Rightarrow \frac{\omega_d}{\omega_s} = 0.1$$

$$\left.\begin{array}{l} |z| = 0.6957 \\ \angle z = 0.2\pi \text{ rad} = 36^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow z = 0.562 \pm j0.409$$



Aplicando la co

Aplicando la co

Para encontrar K

Problema 10

En la siguiente f

Aplicando la condición de ángulo:

$$\theta - 2\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = \pm 180^\circ$$

$$\theta - 2\cdot 36^\circ - 43.76^\circ - 136.96^\circ = \pm 180^\circ$$

$$\theta = 72.72^\circ$$

$$72.72^\circ = 180^\circ - \operatorname{arctg}\frac{0.409}{a - 0.562} \quad \Rightarrow \quad a = 0.429$$

Aplicando la condición de módulo :

$$K\cdot\frac{|z-a|\cdot 0.864}{|z|^2\cdot|z-1|\cdot|z-0.135|} = 1$$

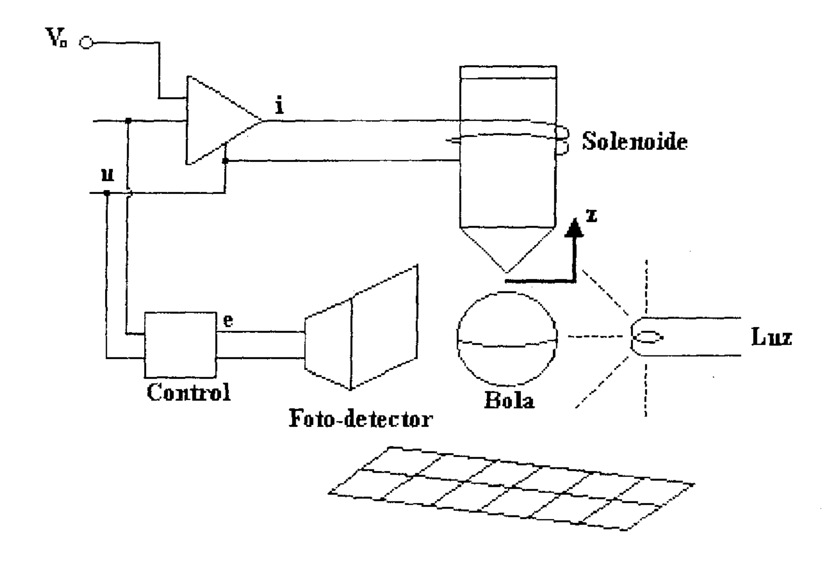
$$K\cdot\frac{0.43\cdot 0.864}{0.695^2\cdot 0.591\cdot 0.599} = 1 \quad \Rightarrow \quad K = 0.46$$

Para encontrar K_p y K_i :

$$\left.\begin{aligned} 0.46 &= K_p + K_i \\ 0.429 &= \frac{K_p}{K_p + K_i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} K_p &= 0.197 \\ K_i &= 0.263 \end{aligned}$$

Problema 10

En la siguiente figura se muestra un esquema de suspensión magnética elemental:



Las características del dispositivo anterior son:

* Para cambios pequeños de la bola cerca de la posición de referencia, la tensión e es proporcional al desplazamiento x de la bola (en metros), tal que:

$$e = 100x$$

* La fuerza de atracción hacia arriba (en Newtons) sobre la bola que provoca el solenoide debido al paso de corriente i (en Amperes) viene dada aproximadamente por:

$$f = 0.5i + 20x$$

* La masa de la bola es 20 gramos y la gravedad es de 9.8 N/Kg.

* El amplificador de potencia es un dispositivo conversor de tensión a corriente, de forma que :

$$i = V_o - u \quad \text{(Amperes)}$$

* El bloque de control es proporcional y verifica la ecuación $u = K \cdot e$

Se pide:

1.- Escriba el conjunto de ecuaciones que rigen este sistema.

2.- Descomponiendo la tensión V_o en la forma $V_o = V_{cte} + V_{ref}$

donde: $V_{cte} \equiv$ Tensión de polarización. Es una tensión continua que sitúa la bola en su posición de equilibrio en $x = 0$.

$V_{ref} \equiv$ Tensión de referencia. Tensión que permite mover la bola hacia otra posición.

La descomposición de la tensión V_o da lugar a que se pueda descomponer la corriente i en :

$$i = i_{cte} + i_{ref}$$

donde: $i_{cte} \equiv$ Corriente de polarización. Corriente necesaria para que la bola esté en equilibrio en x=0.

$i_{ref} \equiv$ Corriente que permite mover la bola hacia otra posición ó corregir una desviación de posición.

Calcular los valores de i_{cte} y V_{cte} de modo que la bola se encuentre en equilibrio en x=0, considerando $V_{ref} = i_{ref} = 0$.

Nota: Se considera que la bola está en equilibrio cuando la suma de todas las fuerzas sobre ella es nula.

3.- Con los valore
en lazo abierto

Nota: Partiendo

4.- Utilizando la f
lazo cerrado to

5.- Tomando la est

5.1.- Dibujar el
del sistem

Para ello

5.2.- Suponer q
la tensión

* Colocar
variació
en su po

* Y si la
variació
equilibri

5.3.- Determin
posición

6.- De las siguient

6.1.- ¿Cual esc
anterior?

6.2.- Con dicho

3.- Con los valores de i_{cte} y V_{cte} obtenidos en el apartado anterior, calcular la función de transferencia en lazo abierto del sistema $U(s)/I_{ref}(s)$.

Nota: Partiendo de la posición de equilibrio de la bola en x=0.

$$TL\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s^2Y(s) - sy'(0) - y(0)$$

4.- Utilizando la función de transferencia $U(s)/I_{ref}(s)$, dibujar el diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado tomando U(s) como variable de salida y V_{ref} como variable de entrada del sistema.

5.- Tomando la estructura obtenida en el apartado anterior:

5.1.- Dibujar el lugar geométrico de las raíces en lazo cerrado, como una función del parámetro K del sistema.

Para ello especificar:

* LGR sobre el eje real.
* Asíntotas.
* Puntos de ruptura.

5.2.- Suponer que el comportamiento dinámico del desplazamiento de la bola (x) es proporcional a la tensión *u*.

* Colocando la bola en su posición de equilibrio en x=0, y el sistema no sufre ninguna variación en la tensión de referencia (V_{ref}=0), ni perturbación exterior. ¿Permanecerá la bola en su posición de equilibrio? Razónese la respuesta.

* Y si la bola sufre alguna variación de su posición debido a alguna perturbación externa o variación de V_{ref}, ¿evolucionará el sistema de manera que la bola adquiera una posición de equilibrio? Razónese la respuesta.

5.3.- Determine el valor de K para el cual la bola oscilará con una frecuencia de 5Hz sobre la posición x=0.

6.- De las siguientes leyes de control:

$$1.- \frac{K(s+a)}{s} \cdot E(s) \; ; \qquad 2.- U(s) = K(s+a) \cdot E(s)$$

/ 6.1.- ¿Cual escogería para obtener un control mejorado con respecto al mostrado en el apartado anterior? Razónese la respuesta.

6.2.- Con dicho control, dar la función de transferencia $U(s)/T_{ref}(s)$.

6.3.- Calcular los valores de a y K del control escogido para que, ante una variación de la tensión de referencia (V_{ref}) en escalón, la bola cambie de posición vertical con el siguiente comportamiento dinámico de la tensión *u*:

$$Mp = 4.321\% \; ; \qquad ts = 1 \text{ seg}$$

Solución :

1.-

$$e = 100x$$
$$f = 0.5i + 20x$$
$$i = V_o - u$$
$$u = K \cdot e$$
$$m = 20gr = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Kg.}$$
$$f_g = 9.8 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 0.196 \text{ N}$$
$$f - f_g = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

2.- En equilibrio $x = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \;\Rightarrow\; f = f_g$

$$f_g = f = 0.5i + 20x\big|_{x=0} = 0.5i \;\Rightarrow\; i_{cte} = \frac{f_g}{0.5} = 0.392 \text{ A}$$
$$i = V_o - u\big|_{x=0 \Rightarrow u=0} = V_{cte} \;\Rightarrow\; V_{cte} = i_{cte} = 0.392 \text{ V}$$

3.- $$F(s) = 0.5 \cdot I(s) + 20 \cdot X(s) \;\; ; \quad I(s) = V_o(s) - U(s)$$

$$\left.\begin{array}{l} E(s) = 100 \cdot X(s) \\ U(s) = K \cdot E(s) \end{array}\right\} \Rightarrow X(s) = \frac{E(s)}{100} = \frac{U(s)}{100 \cdot K}$$

$$F(s) - f_g = ms^2 \cdot X(s) \;\; ; \quad 0.5 \cdot I(s) + 20 \cdot X(s) - f_g = ms^2 \cdot X(s)$$

$$0.5 \cdot I(s) + 20 \frac{U(s)}{100 \cdot K} - 0.196 = 20 \cdot 10^{-3} s^2 \frac{U(s)}{100 \cdot K}$$

$$\frac{20}{K} U(s) + 50 \cdot \left(I_{cte} + I_{ref}(s)\right) - 19.6 = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{K} s^2 \cdot U(s)$$

$$\frac{20}{K} U(s) + 50 \cdot \left(0.392 + I_{ref}(s)\right) - 19.6 = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{K} s^2 \cdot U(s)$$

$$\frac{U(s)}{I_{ref}(s)} = \frac{50K}{20 \cdot 10^{-3} s^2 - 20}$$

4.-

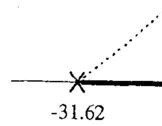
5.1.-

5.2.-* Permanece
correspond
tensión de e

* No, puesto
de K.

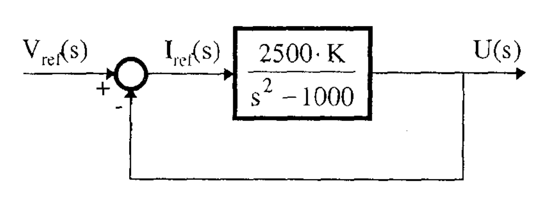
5.3.- 5 Hz ⇒ ω =
en $s = \pm j10\pi$.

Aplicando la condi

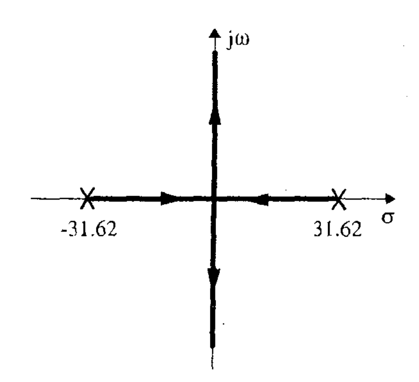


6.1.- Se deberá esco
el semiplano i
algunos valore

4.-



5.1.-
$$\frac{U(s)}{I_{ref}(s)} = \frac{2500K}{s^2 - 1000}$$



Punto de ruptura en $\sigma = 0$

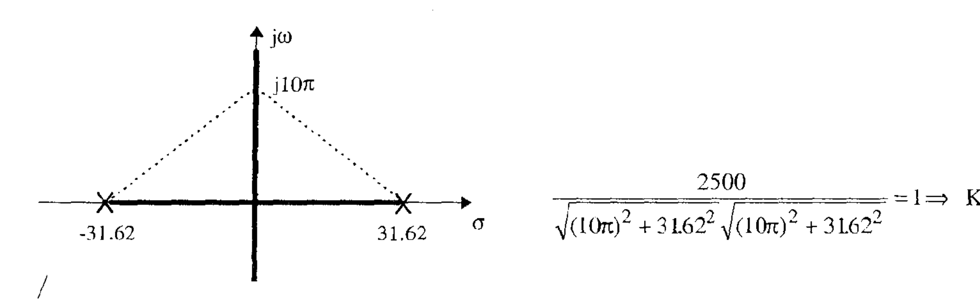
Asíntota sobre eje $j\omega$.

5.2.-* Permanecerá en equilibrio, pues aunque la función de transferencia es inestable, ésta se corresponde con el comportamiento dinámico del sistema, y no existe ninguna variación en la tensión de entrada ni perturbación exterior que la modifique.

* No, puesto que, según el LGR, el sistema es siempre inestable u oscilatorio para cualquier valor de K.

5.3.- 5 Hz $\Rightarrow \omega = 10\pi \Rightarrow$ Para que oscile con $\omega = 10\pi$, los polos en lazo cerrado deben estar situados en $s = \pm j10\pi$.

Aplicando la condición de módulo sobre este punto:

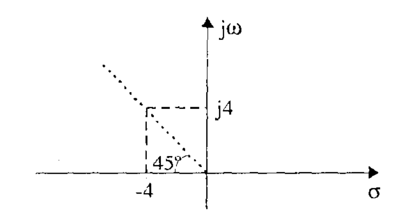


$$\frac{2500}{\sqrt{(10\pi)^2 + 31.62^2}\sqrt{(10\pi)^2 + 31.62^2}} = 1 \Rightarrow K = 0.794$$

6.1.- Se deberá escoger el segundo control que se corresponde con un PD. Así se atrae las ramas hacia el semiplano izquierdo del plano S, consiguiendo de esta forma que el sistema sea estable para algunos valores de K.

6.2.- $$\frac{U(s)}{I_{ref}(s)} = \frac{2500K(s+a)}{s^2 - 1000}$$

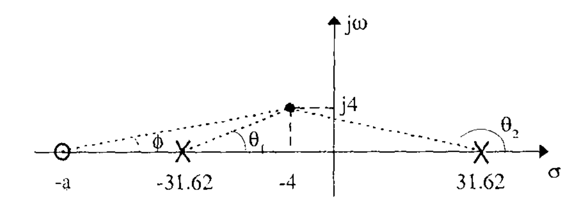
6.3.-



$$Mp = 4.321\% \Rightarrow \xi = 0.7071 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 1 \text{ seg} \Rightarrow \sigma = 4$$

Aplicando la condición de ángulo al punto s = -4 + j4:



$$\text{arctg}\frac{4}{a-4} - \text{arctg}\frac{4}{27.62} - 180^\circ + \text{arctg}\frac{4}{35.62} = \pm 180^\circ$$

$$\Rightarrow \quad a = 128.61$$

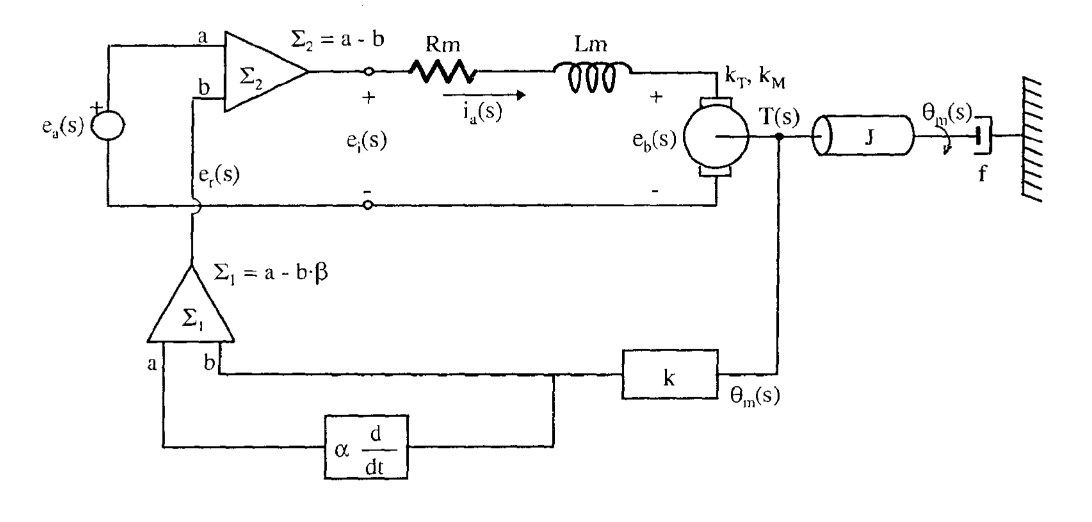
Para calcular el valor de K se aplica la condición de módulo:

$$\frac{2500K\sqrt{128.61^2 + 4^2}}{\sqrt{27.62^2 + 4^2}\sqrt{35.62^2 + 4^2}} = 1 \Rightarrow K = 0.0032$$

Problema 11

<u>1ª Parte:</u>

Dado el sistema de control de un motor de corriente continua controlado por inducido de la figura:



Donde:

T ≡
f ≡
e_b ≡
Rm ≡
α ≡
k ≡
k_M ≡

1.- Obtener las

2.- Si la función

completo co

3.- Calcular la e

4.- Calcular el
siguientes:

5.- Sabiendo que
diseño se ajus

6.- ¿Cuál es la
dominancia?

7.- Si una de las
de los *polos a*
igual a la sum

y como criteri

3·{Módulo parte
máxima ganancia
apartado 4.

Donde:

T	≡	Par del motor.	J	≡	Momento de inercia.
f	≡	Coeficiente de fricción.	θ_m	≡	Desplazamiento angular.
e_b	≡	Fuerza electromotriz.	i_a	≡	Corriente de inducido.
Rm	≡	Resistencia de inducido.	Lm	≡	Inductancia de inducido.
α	≡	Parámetro del derivador.	β	≡	Parámetro de ponderación.
k	≡	Ganancia del control.	k_T	≡	Cte. de proporcionalidad entre T(s) e $i_a(s)$.
k_M	≡	Cte. de proporcionalidad entre $e_b(s)$ y la velocidad angular.			

1.- Obtener las funciones de transferencia $M(s) = \theta_m(s)/e_i(s)$ y $N(s) = e_r(s)/\theta_m(s)$.

2.- Si la función de transferencia es: $M(s) = \dfrac{10}{s(s+1)(s+10)}$ y $\alpha = 1$. Dibujar el diagrama de bloques completo correspondiente al sistema de la figura anterior.

3.- Calcular la expresión del error estacionario de posición y de velocidad.

4.- Calcular el valor del parámetro $\boldsymbol{\beta}$ y de la ganancia **k** para que se cumplan las especificaciones siguientes:

$$Mp = 1.14\ \%$$

$$ts = 1.081\ \text{seg.}$$

5.- Sabiendo que la situación del tercer polo del sistema en lazo cerrado es s = -3.6, comprobar si este diseño se ajusta a las especificaciones anteriores.

6.- ¿Cuál es la acción más sencilla sobre el control diseñado que haría cumplir la condición de dominancia?

7.- Si una de las propiedades del lugar geométrico de las raíces es su constancia, es decir, que la suma de los *polos de lazo cerrado* permanece constante con independencia del valor de la ganancia **k**, e igual a la suma de los *polos de lazo abierto*:

$$\sum P_{LA} = \sum P_{LC}$$

y como criterio de dominancia crítico se toma:

3·{Módulo parte real polos dominantes} ≤ {Módulo parte real polos no dominantes}, calcular la máxima ganancia que garantiza la situación de dominancia, manteniendo el valor de $\boldsymbol{\beta}$ calculado en el apartado 4.

2ª Parte:

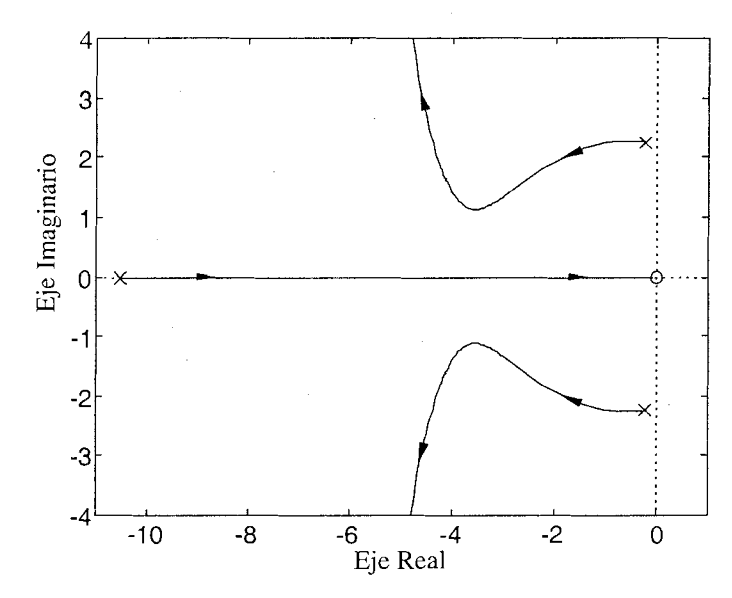
En la realimentación del sistema anterior se ha producido un cambio, quedando el valor de β fijado a β=2. Por tanto, como parámetros variables sólo quedan $\boldsymbol{\alpha}$ y la ganancia **k**. En esta nueva situación se pide:

1.- Calcular la expresión que toma la función de transferencia de lazo abierto.

2.- Calcular el valor de la ganancia **k** para que el coeficiente estático de velocidad sea $k_v = 5.4\ seg^{-1}$.

3.- Obtener la función de transferencia equivalente que permite obtener el LGR del sistema en función del parámetro $\boldsymbol{\alpha}$.

4.- Si el LGR en función del parámetro $\boldsymbol{\alpha}$ es el de la figura siguiente:



4.1.- Indicar cuál es el valor de los polos en lazo cerrado que conseguirían el mínimo sobreimpulso en la respuesta del sistema a una entrada del tipo escalón unitario, suponiendo aproximación por polos dominantes.

4.2.- Calcular el valor de $\boldsymbol{\alpha}$ sabiendo que los polos en lazo abierto de la función de transferencia equivalente del apartado 3 están ubicados en:

$$s_{1,2} = -0.232 \pm 2.24j \qquad y \qquad s_3 = -10.53$$

4.3.- Sabiendo que la situación del tercer polo es s = -3.71, comprobar si este diseño se ajusta a la aproximación por polos dominantes.

4.4.- Calcular, aplicando el teorema de la constancia del LGR, el valor máximo de $\boldsymbol{\alpha}$ que garantiza dominancia. Dar la expresión completa del control.

Solución:

1ª Parte:

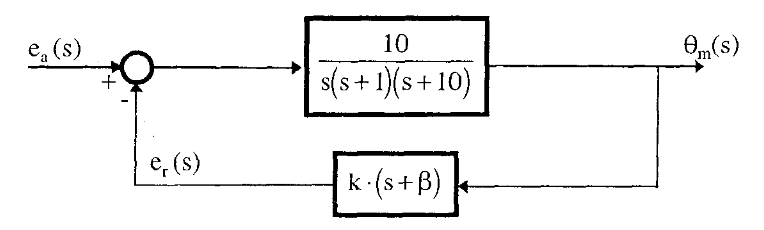
1.- Las ecuaciones que definen al motor son:

$$e_i(s) - e_b(s) = (R_m + L_m s)\cdot i_a(s)$$
$$T(s) = k_T \cdot i_a(s) = s\cdot(J\cdot s + f)\cdot\theta_m(s)$$
$$e_b(s) = k_M \cdot s\cdot\theta_m(s)$$

Operando se obtiene : $$\frac{\theta_m(s)}{e_i(s)} = \frac{k_T}{s\cdot\left[J\cdot L_m\cdot s^2 + (J\cdot R_m + L_m\cdot f)\cdot s + R_m\cdot f + k_M\cdot k_T\right]}$$

La realimentación será : $$\frac{e_r(s)}{\theta_m(s)} = k\cdot(\alpha\cdot s + \beta)$$

2.- El diagrama de bloques quedará de la forma:



3.- Por tener un polo de lazo abierto en el origen $\Rightarrow$ $e_{ssp} = 0$.

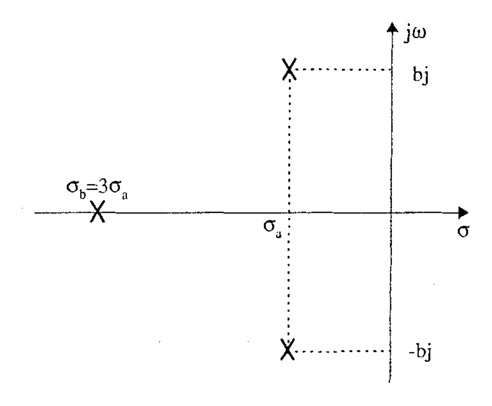
$$k_v = \lim_{s\to 0} s\cdot G(s)H(s) = \frac{10k\beta}{10} = k\beta$$

4.- Con las condiciones de tiempo de establecimiento y de máximo sobreimpulso, el punto resultante en el plano de Laplace es s = -3.7 ± 2.6j. Este punto se ajusta aplicando la condición de módulo y ángulo, de tal manera que β = 1.98 y k = 3.7. Por tanto, se dispone de un cero en s = -1.98 y de la ganancia que ajusta el punto en el plano de Laplace.

5.- No se puede aplicar dominancia. El polo real está en la misma posición que los polos complejos conjugados. No cumplirá las especificaciones al quedar un sistema de tercer orden en lazo cerrado.

6.- El control diseñado es un proporcional derivativo. La acción más sencilla es ser menos riguroso con las especificaciones temporales y disminuir la ganancia. Según el LGR del sistema diseñado, al disminuir la ganancia, los polos complejos conjugados se acercan más al eje $j\omega$, y el polo real se desplazará hacia la izquierda. En consecuencia, al reducir la ganancia, se llega a un valor de la misma a partir del cual se cumplirá la condición de dominancia especificada en el enunciado.

7.- Para aplicar el criterio de dominancia, basta con que el módulo de la parte real de los polos no dominantes sea tres veces mayor que el módulo de la parte real de los polos dominantes. Se pide la máxima ganancia que permite la condición de dominancia; en consecuencia, se debe tomar como condición límite la situación en que el polo real se encuentre a una distancia del eje imaginario tres veces mayor que la de los polos complejos conjugados.



La situación límite para cumplir dominancia será entonces: $\sigma_b = 3\sigma_a$.

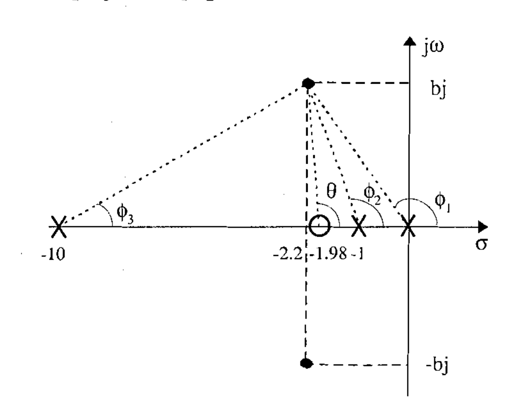
Aplicando lo indicado sobre la constancia del LGR:

$$\sum P_{LA} = 0+(-1)+(-10) = -11 = \sum P_{LC} = (-\sigma_b)+(-\sigma_a + bj)+(-\sigma_a - bj) = -\sigma_b - 2\sigma_a$$

$$\sum P_{LA} = -11 = \sum P_{LC} = -3\sigma_a - 2\sigma_a = -5\sigma_a$$

Luego: $\sigma_a = \dfrac{11}{5} = 2.2$ y $\sigma_b = 3\sigma_a = 6.6$

Una vez se conoce la posición de los polos de lazo cerrado en la situación límite de dominancia, resta determinar la ganancia **k** para la que se obtiene esta disposición de las raíces, así como el valor de la parte imaginaria de los polos complejos conjugados. Mediante la condición de ángulo:



$$180^\circ - \operatorname{arctg}\frac{b}{2.2-1.98} - \left(180^\circ - \operatorname{arctg}\frac{b}{2.2}\right) - \left(180^\circ - \operatorname{arctg}\frac{b}{2.2-1}\right) - \operatorname{arctg}\frac{b}{10-2.2} = \pm 180^\circ$$

$$\operatorname{arctg}\frac{b}{2.2} - \operatorname{arctg}\frac{b}{1.2} - \operatorname{arctg}\frac{b}{0.22} - \operatorname{arctg}\frac{b}{7.8} = 0^\circ \quad \Rightarrow \quad b = 1.82$$

Mediante la condición de módulo se obtiene k = 2.719.

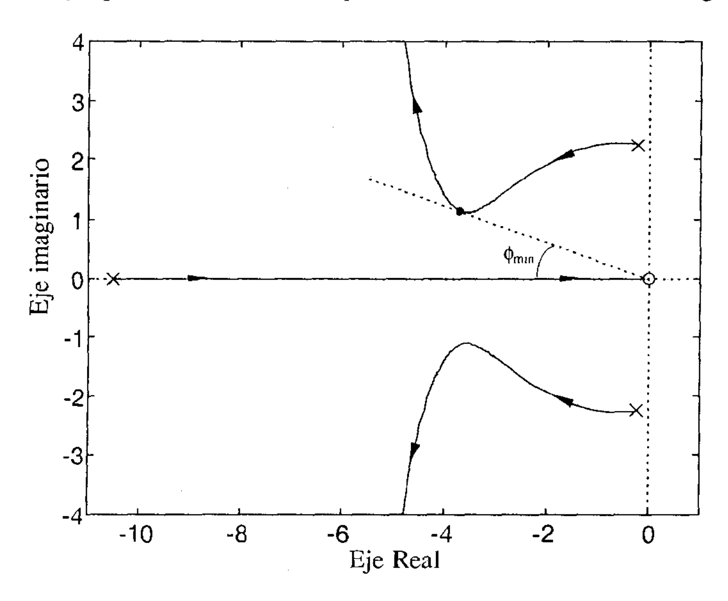
2ª Parte:

1.- $$G(s)H(s) = \frac{10k\cdot(\alpha s+2)}{s(s+1)(s+10)}$$

2.- $$k_v = \lim_{s\to 0} s\cdot G(s)H(s) = 2k = 5.4 \quad \Rightarrow \quad k = 2.7$$

3.- De la ecuación característica se obtiene: $G(s)H(s)_{equivalente} = \dfrac{27\alpha s}{s^3+11s^2+10s+54}$

4.1.- Queda claro que el mínimo sobreimpulso, según el LGR mostrado, está en el ángulo de la recta tangente al codo formado por la rama que constituyen las distintas ubicaciones de los polos complejos conjugados. Esto es así ya que el mínimo sobreimpulso se asocia con el mínimo ángulo ($\cos\phi = \xi$).



La situación de los polos de lazo cerrado es aproximadamente: $s_{1,2} = -3.65 \pm 1.1j$.

4.2.- Mediante la condición de módulo se obtiene $\alpha = 1.16$.

4.3.- Si el tercer polo se encuentra en s = -3.71, no es posible aplicar dominancia.

4.4.- Aplicando el teorema de la constancia del LGR:

$$\sum P_{LA} = -10.53 - 2\cdot 0.232 = -11 = \sum P_{LC} = -\sigma_a - 2\cdot\sigma_b = -\sigma_a - 2\cdot(3\sigma_a)$$

$$\sigma_a = 2.2 \qquad \sigma_b = 6.6$$

A partir del LGR, la parte imaginaria será bj = ±1.82j. De esta forma, aplicando la condición de módulo sobre $s_{1,2} = -2.2 \pm 1.82j$, para calcular el valor máximo de α, se obtiene $\alpha_{máx} = 1$

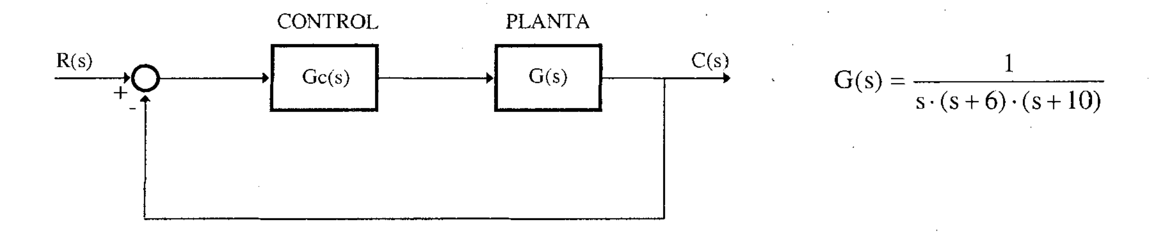
La expresión completa del control:

$$D(s) = 2.7\cdot(s+2)$$

Problema 12

La compensación en retardo-avance de fase permite mejorar el estado estacionario y la respuesta transitoria manteniendo una determinada estabilidad relativa.

La siguiente figura muestra un sistema de control:



Suponiendo un control proporcional con ganancia proporcional $k_p = 192.064$, y conociendo que una de las raíces en lazo cerrado se ubica en s = -12.413.

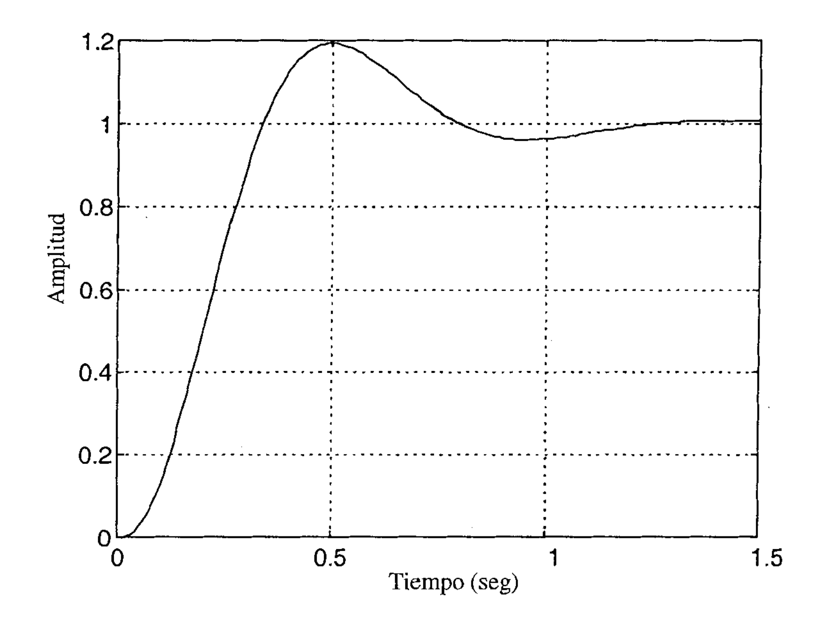
1.- Determinar los parámetros de respuesta transitoria M_p, t_s y t_p. Razonar por qué puede aplicarse la aproximación de polos dominantes.

2.- Calcular el error en estado estacionario de velocidad con este valor de ganancia.

Con el objetivo de mejorar la respuesta transitoria del sistema, se sustituye el control proporcional por un control en adelanto de fase:

$$Gc(s) = k\cdot\frac{(s+6)}{(s+p)}$$

La siguiente figura muestra la respuesta en lazo cerrado obtenida para un escalón unitario de entrada.



3.- Determinar los parámetros **k** y **p** del controlador utilizado.

4.- Determinar el error en estado estacionario de velocidad.

5.- Comentar, de forma adecuada, el funcionamiento y las mejoras introducidas por este tipo de controlador.

Por último, se añade al control anterior una etapa de retardo de fase para lograr una red retardo-avance de fase:

$$Gc(s) = k \cdot \frac{(s+6)}{(s+p)} \cdot \frac{(s+q)}{(s+0.01)}$$

donde **k** y **p** son los parámetros anteriormente calculados.

6.- Calcular el valor de z para reducir a una décima parte el error en estado estacionario de velocidad que se tenía con el control proporcional del inicio del ejercicio.

7.- Indicar los valores de los parámetros de respuesta transitoria cuando se utiliza este controlador. Razonar la respuesta.

Solución:

1.-
$$G_{LA}(s) = k_p \cdot G(s) = 192.064 \cdot \frac{1}{s \cdot (s+6) \cdot (s+10)}$$

$$1 + G_{LA}(s) = s \cdot (s+6) \cdot (s+10) + 192.064 = 0 \quad \Rightarrow \quad s^3 + 16s^2 + 60s + 192.064 = 0$$

$$(s+12.413)\cdot\left(s^2+3.587s+15.4745\right)=0$$

$$s_{1,2}=-1.7935\pm j3.5011 \;\;;\;\; s_3=-12.413$$

Es posible aplicar dominancia, ya que: $1.7935 \ll 12.413$.

De esta forma:

$$M_p=e^{-\frac{\pi\sigma}{\omega_d}}=20\% \;\;;\;\; t_s=\frac{4}{\sigma}=2.23 \text{ seg.} \;\;;\;\; t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=0.897 \text{ seg.}$$

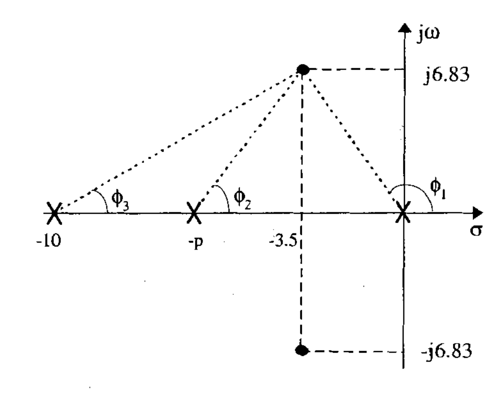
2.- $$k_v=\lim_{s\to 0} s\cdot G_{LA}(s)=\frac{192.064}{6\cdot 10}=3.201 \;\Rightarrow\; e_{ssv}=\frac{1}{k_v}=0.3124\equiv 31.24\%$$

3.- De la gráfica: $t_p = 0.46$ seg. y $M_p = 20\%$.

$$\left.\begin{aligned} t_p&=\frac{\pi}{\omega_d} \;\Rightarrow\; \omega_d=6.83 \\ M_p&=e^{-\frac{\pi\sigma}{\omega_d}} \;\Rightarrow\; \sigma=3.5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow s_{1,2}=-3.5\pm j6.83$$

$$G_{LA}(s)=k\cdot\frac{1}{s\cdot(s+10)\cdot(s+p)}$$

Aplicando la condición de ángulo sobre estos puntos:



$$-\text{arctg}\frac{6.83}{p-3.5}-\text{arctg}\frac{6.83}{10-3.5}-\left(180°-\text{arctg}\frac{6.83}{3.5}\right)=\pm 180°$$

$$\text{arctg}\frac{6.83}{p-3.5}=16.4492° \;\Rightarrow\; p=26.633$$

Para calcular el valor de k, se utiliza la condición de módulo:

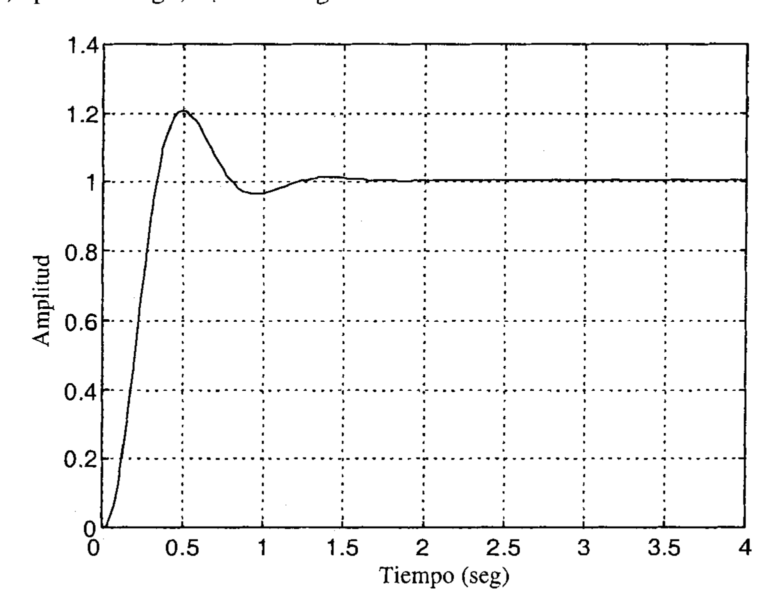
$$k \cdot \frac{1}{\sqrt{6.83^2 + (26.633 - 3.5)^2}\sqrt{6.83^2 + (10 - 3.5)^2}\sqrt{6.83^2 + 3.5^2}} = 1 \;\Rightarrow\; k = 1745.3514$$

4.- $$k_v = \lim_{s \to 0} s \cdot G_{LA}(s) = \frac{1745.3514}{10 \cdot 26.633} = 6.5533 \;\Rightarrow\; e_{ssv} = \frac{1}{k_v} = 0.1526 \equiv 15.26\%$$

5.- Desplazamiento del LGR hacia el semiplano izquierdo manteniendo el M_p, lo que permite mejorar el e_{ssv}.

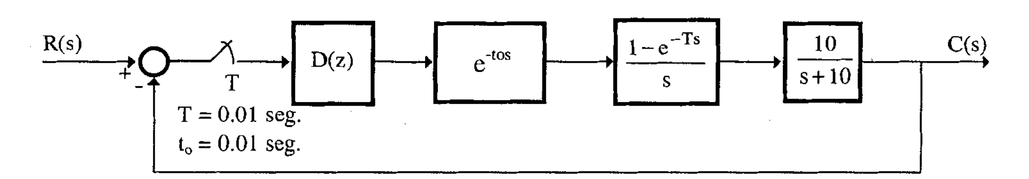
6.- $$k_v = \lim_{s \to 0} s \cdot G_{LA}(s) = k \cdot \frac{q}{10 \cdot p \cdot 0.01} = 10 \cdot 3.201 \;\Rightarrow\; q = 0.0488453$$

7.- Mp = 20% ; tp ≈ 0.46 seg. ; ts ≈ 1.7 seg.



Problema 13

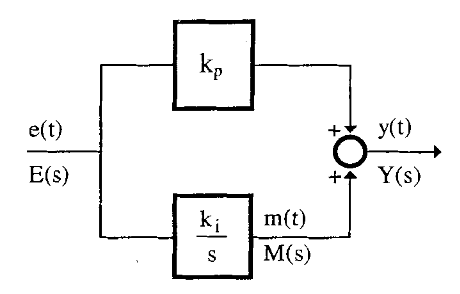
Dado el sistema de la figura:



Donde t_o es el tiempo que tarda el controlador D(z) en procesar las muestras de la señal de error.

1.- Para un controlador proporcional $D(z)=k_p$, calcular la función de transferencia de lazo abierto y el error en régimen estacionario cometido frente a una entrada escalón unitario.

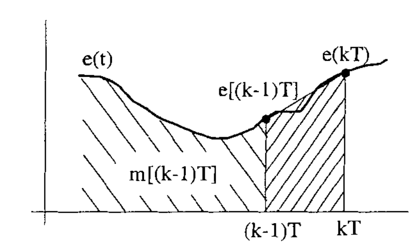
Para conseguir un error en régimen estacionario nulo se desea añadir una acción integral a la acción proporcional ya existente, de la forma:



$$y(t) = k_p \cdot e(t) + k_i \cdot \int e(t)dt$$

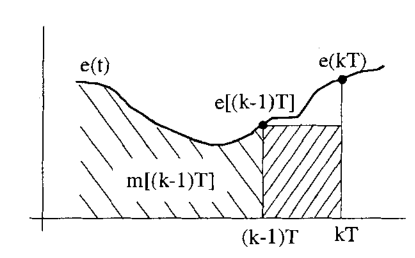
Se desea discretizar la acción integral, por lo que es posible aplicar tres métodos diferentes:

1. Método de Tustin o de integración trapezoidal:



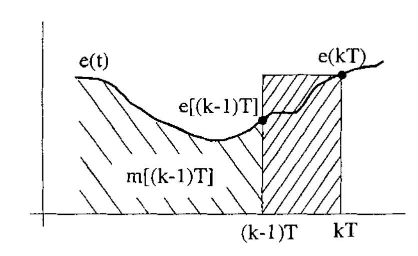
Donde se aproxima la curva del error mediante trapecios.

2. Método Forward de integración rectangular:



Donde la altura del rectángulo viene dada por la amplitud de la muestra previa e[(k-1)T].

3. Método Backward de integración rectangular:



Donde la altura del rectángulo viene dada por la amplitud de la muestra actual e(kT).

2.- Obtener la expresión del área calculada m[kT], hasta la muestra actual kT, con cada uno de los tres métodos, tomando para ello m[(k-1)T] como el área calculada previamente hasta la muestra anterior (k-1)T. Obtener la expresión en el plano Z de la acción integral como Gi(z)=M(z)/E(z).

3.- Un controlador PI discreto se caracteriza por la expresión :

$$D(z) = k'\frac{z+a}{z-1}$$

Obtener la expresión de **k'** y de **a** para cada uno de los tres métodos de integración.

4.- Diseñar un controlador PI con la expresión general del apartado anterior (cálculo de **k'** y **a**), de manera que se cumplan las especificaciones siguientes:

$$M_p = 2.15\ \% \qquad t_s = 0.72 \text{ seg.}$$

Solución:

1.- $D(z)=k_p$. Cálculo de $G_{LA}(z)$ y e_{ssp}:

$t_o = T \Rightarrow$ Teorema del desplazamiento $\Rightarrow TZ\left\{e^{-Ts}\right\} = z^{-1}$

De esta forma: $G_{LA}(z) = k_p \cdot z^{-1} \cdot \left(1 - z^{-1}\right) \cdot TZ\left\{\frac{10}{s\cdot(s+10)}\right\}\Bigg|_{T=0.01} = k_p \cdot \frac{0.095162}{z\cdot(z-0.904837)}$

$$e_{ssp} = \frac{1}{1+K_P} \ ; \quad K_P = \lim_{z\to 1} G_{LA}(z) = \lim_{z\to 1} k_p \cdot \frac{0.095162}{z\cdot(z-0.904837)} = k_p$$

$$e_{ssp} = \frac{1}{1+k_p}$$

2.- Expresión de la acción integral:

2.1.- Método Tustin:

$$m[kT] = m[(k-1)T] + Te[(k-1)T] + \frac{T}{2}\{e[kT] - e[(k-1)T]\}$$

$$m[kT] = m[(k-1)T] + \frac{T}{2}\{e[kT] + e[(k-1)T]\}$$

$$M(z) = z^{-1}M(z) + \frac{T}{2}\left\{E(z) + z^{-1}E(z)\right\} \ \Rightarrow \ \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{T}{2}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{T}{2}\cdot\frac{z+1}{z-1}$$

2.2.- Método Forward:

$$m[kT] = m[(k-1)T] + Te[(k-1)T]$$

$$M(z) = z^{-1}M(z) + Tz^{-1}E(z) \Rightarrow \frac{M(z)}{E(z)} = T\cdot\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = T\cdot\frac{1}{z-1}$$

2.3.- Método Backward:

$$m[kT] = m[(k-1)T] + Te[kT]$$

$$M(z) = z^{-1}M(z) + T\cdot E(z) \Rightarrow \frac{M(z)}{E(z)} = T\cdot\frac{1}{1-z^{-1}} = T\cdot\frac{z}{z-1}$$

3.- $D(z) = k'\frac{z+a}{z-1}$. Calculo de **a** y **k'** para cada método.

3.1.- Método Tustin:

$$D(z) = k_p + k_i\frac{T}{2}\cdot\frac{z+1}{z-1} = k'\frac{z+a}{z-1}$$

$$\frac{2k_p(z-1) + k_iT(z+1)}{2} = k'(z+a)$$

$$\frac{2k_p + k_iT}{2}\cdot\left(z + \frac{k_iT - 2k_p}{k_iT + 2k_p}\right) = k'(z+a)$$

$$k' = \frac{2k_p + k_iT}{2}\ ; \quad a = \frac{k_iT - 2k_p}{k_iT + 2k_p}$$

3.2.- Método Forward:

$$D(z) = k_p + k_iT\cdot\frac{1}{z-1} = k'\frac{z+a}{z-1}$$

$$k' = k_p\ ; \quad a = \frac{k_iT}{k_p} - 1$$

3.3.- Método Backward:

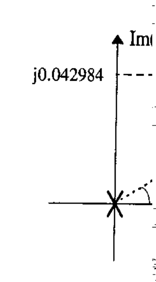
$$D(z) = k_p + k_iT\cdot\frac{z}{z-1} = k'\frac{z+a}{z-1}$$

$$k' = k_p + k_iT\ ; \quad a = -\frac{k_p}{k_p + k_iT}$$

4.- Diseñar PI p

$t_s = \frac{4}{\sigma}$

Aplicando la co



Mediante la con

La expresión del

4.- Diseñar PI para cumplir características de respuesta transitoria especificadas:

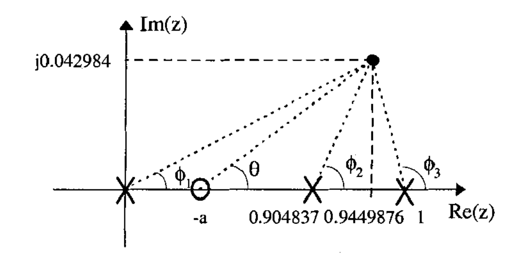
$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 0.72\text{seg.} \Rightarrow \sigma = 5.555 \;;\quad M_p = e^{-\frac{\pi\sigma}{\omega_d}} = 0.0215 \Rightarrow \omega_d = 4.5455\text{rad/s}$$

$$s_{1,2} = -5.555 \pm j4.5455$$

$$z = e^{Ts} = e^{T(-\sigma \pm j\omega_d)} = e^{-\sigma T} e^{\pm j\omega_d T} = e^{-5.555 \cdot T} e^{\pm j4.5455 \cdot T}$$

$$z_{1,2} = 0.9449876 \pm j0.042984$$

Aplicando la condición de ángulo sobre estos puntos del plano Z:



$$\theta - (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) = \pm 180^\circ \Rightarrow a = -0.73473$$

Mediante la condición de módulo $\Rightarrow$ k' = 0.1902685

La expresión del controlador:

$$D(z) = 0.1902685\frac{z - 0.73473}{z - 1}$$

4. Análisis frecuencial de sistemas de control

En el presente capítulo se describirá la metodología de análisis basada en la respuesta frecuencial de un sistema de control. Dicha metodología requiere el conocimiento de la respuesta frecuencial del sistema en lazo abierto (que puede obtenerse de un modo sencillo a partir de medidas de la respuesta en régimen permanente senoidal) para, posteriormente, aplicar el criterio de estabilidad de Nyquist, que permitirá determinar la estabilidad absoluta del sistema en lazo cerrado.

Los márgenes de fase y ganancia pueden considerarse extensiones del criterio de estabilidad de Nyquist y permiten determinar la estabilidad relativa de un sistema de control.

Por último, en este tema se expondrán aquellas características a tener en cuenta para desarrollar el análisis de un sistema de control en tiempo discreto a partir de su respuesta frecuencial.

4.1 Respuesta frecuencial de sistemas de tiempo continuo

Dado el sistema de tiempo continuo de la figura 4.1:

$$E(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow C(s)$$

Fig. 4.1 Sistema de tiempo continuo

$$\text{donde: } E(s) = L[\text{sen}(\omega t)] = \frac{\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)} = \frac{\omega}{(s-j\omega)\cdot(s+j\omega)}$$

En el sistema definido, se obtiene el régimen permanente senoidal (RPS) considerando la respuesta del sistema estable cuando el tiempo tiende a infinito y se posee una señal de entrada senoidal.

$$C(s) = \frac{G(s)\cdot\omega}{(s+j\omega)\cdot(s-j\omega)} \tag{4.1}$$

Para obtener la antitransformada de Laplace debe desarrollarse C(s) en fracciones parciales.

$$C(s) = \frac{k1}{(s+j\omega)} + \frac{k2}{(s-j\omega)} + Cg(s) \tag{4.2}$$

Los dos primeros términos del desarrollo son originados por las raíces de la transformada de Laplace de la señal senoidal de entrada, mientras que Cg(s) contiene la serie de términos correspondientes al desarrollo en fracciones parciales de los polos de G(s). El RPS únicamente existe en sistemas estables, dado que ello implica que los términos temporales que caracterizan la respuesta transitoria del sistema desaparecen cuando el tiempo crece suficientemente:

$$L^{-1}\left[Cg(s)\right] = cg(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Denominando Css(s) a la transformada de Laplace de la señal que perdura cuando el tiempo crezca infinitamente (estado estacionario):

$$Css(s) = \frac{k1}{(s+j\omega)} + \frac{k2}{(s-j\omega)} \tag{4.3}$$

Cálculo de los residuos:

$$k1 = C(s)\cdot(s+j\omega)\Big|_{s=-j\omega} = -\frac{G(-j\omega)}{2j}; \qquad k2 = \frac{G(j\omega)}{2j} \tag{4.4}$$

Debe observarse que: $G(j\omega) = G(s)\big|_{s=j\omega}$ es la respuesta frecuencial del sistema de tiempo continuo, esto es, debe evaluarse la función de transferencia en un punto del plano S ubicado sobre el eje imaginario.

A partir de la descripción del procedimiento de cálculo puede indicarse que $G(j\omega)$ es una función de variable compleja, y verifica:

$$G(j\omega) = \left|G(j\omega)\right|\cdot e^{j\angle G(j\omega)} \tag{4.5}$$

$$G(-j\omega) = \left|G(-j\omega)\right|\cdot e^{j\angle G(-j\omega)} = \left|G(j\omega)\right|\cdot e^{-j\angle G(j\omega)} \tag{4.6}$$

Realizando la antitransformada de la ecuación de Css(s), se obtiene:

$$Css(t) = k1\cdot\left(e^{-j\omega t}\right) + k2\cdot\left(e^{j\omega t}\right) \tag{4.7}$$

Sustituyendo las expresiones de los residuos k1 y k2:

$$Css(t) = \left|G(j\omega)\right|\cdot\left[\frac{e^{j(\omega t+\angle G(j\omega))} - e^{-j(\omega t+\angle G(j\omega))}}{2j}\right] = \left|G(j\omega)\right|\cdot \text{sen}\left(\omega t + \angle G(j\omega)\right) \tag{4.8}$$

En conclusión, la respuesta de un sistema de tiempo continuo en RPS es una señal senoidal con igual frecuencia que la señal de entrada, con una amplitud igual al producto de la amplitud de entrada por el

módulo de la respuesta frecuencial, y cuya fase es igual a la suma de fases de la señal de entrada y la fase de su respuesta frecuencial. De este modo, no es necesario realizar la antitransformada de Laplace para determinar cuál es la salida de un sistema de tiempo continuo estable en RPS.

Debe observarse que la obtención de medidas experimentales de la respuesta frecuencial de un sistema es muy sencilla, debido a que puede utilizarse la propia señal de excitación para realizar el sincronismo de la medida. De este modo, se puede obtener la respuesta frecuencial a partir de medidas experimentales sin necesidad de conocer la función de transferencia del sistema.

4.1.1 Formas de representación de la respuesta frecuencial

Las formas más habituales de representar la respuesta frecuencial de un sistema son:

- Diagrama de Bode en módulo y fase: Diagrama en módulo o fase de $G(j\omega)$ respecto a un eje frecuencial.

- Diagrama polar: Diagrama de módulo y fase de $G(j\omega)$ en el plano $G(j\omega)$ $(0 \leq \omega < \infty)$. En la figura 4.2 se muestran los ejes coordenados de un diagrama polar, así como la información de módulo y fase que puede extraerse de un punto de dicho diagrama.

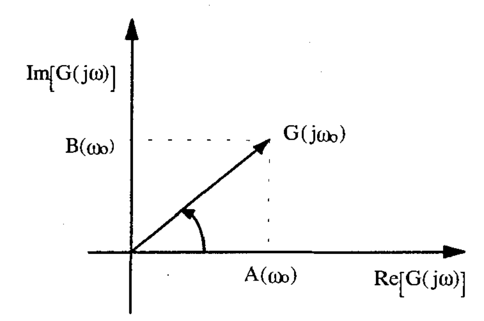


Fig. 4.2 Ejes diagrama polar.

$$G(j\omega_0) = A(\omega_0) + jB(\omega_0) = |G(j\omega_0)| \cdot e^{j\angle G(j\omega_0)}$$

En la figura 4.3 se representa el diagrama polar de un sistema de tercer orden, donde se puede observar la evolución de la fase desde 0° hasta -270° correspondientes a $\omega \to 0$ y $\omega \to \infty$, respectivamente. Debe observarse que el diagrama posee un sentido en frecuencias crecientes, de manera que $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2$. El diagrama polar posee la información de fase y módulo de la respuesta frecuencial en una única representación, a diferencia del diagrama de Bode que los representa en gráficas separadas.

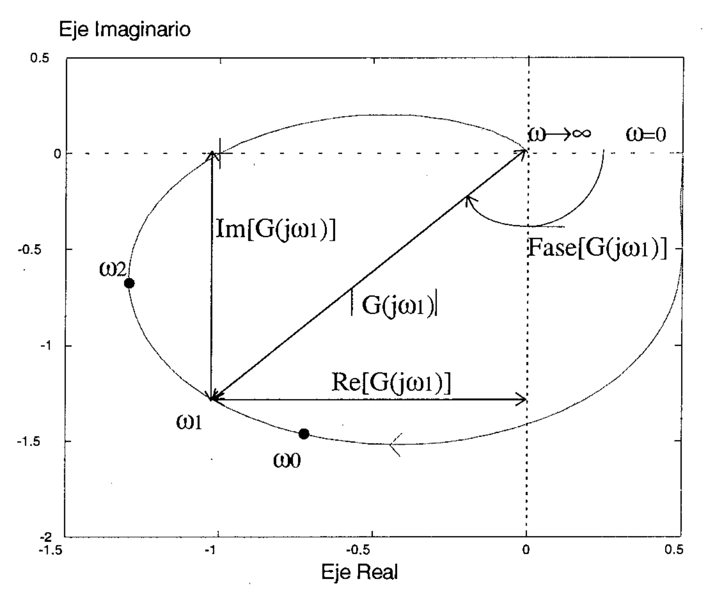


Fig. 4.3 Diagrama polar sistema de tercer orden.

Para mostrar la información contenida en un diagrama polar, pueden observarse las distintas respuestas frecuenciales que se muestran en la figura 4.4, correspondientes al sistema de segundo orden siguiente:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1}$$

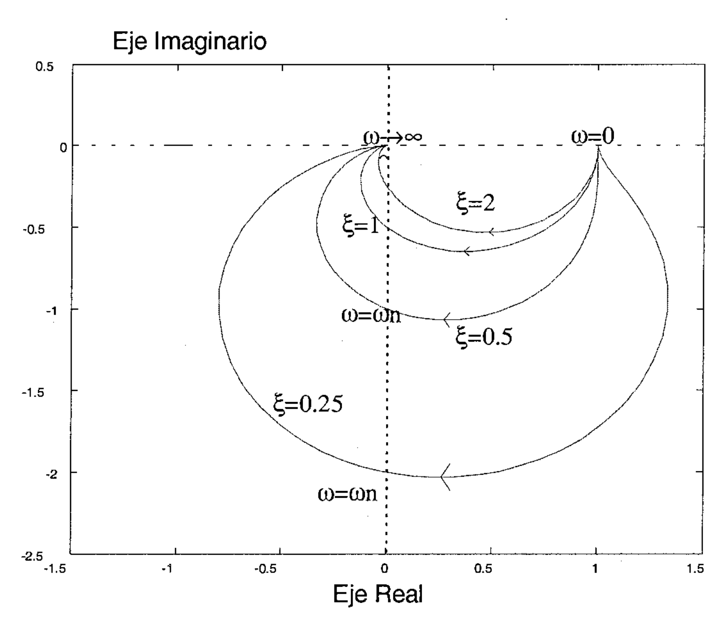


Fig. 4.4 Diagrama polar de un sistema de segundo orden.

En dicha figura
o de paso por la

4.2 Criterio d

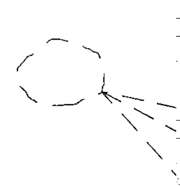
El criterio de e
invariante en el
estabilidad relat
sistema en lazo
estabilidad de N
lazo cerrado) qu
cuando el result
sistemas en lazo
adelante.

4.2.1 Teorema

El criterio de e
teorema de la re

* Transformació
polos, todo cam
en una curva cer

La figura 4.5 mu



* Teorema de
multiplicidad, in
no pase por nin
plano F(s) en la

En dicha figura se puede ver como el efecto de resonancia cuando $\xi<0$, así como la frecuencia natural o de paso por la fase -90°.

4.2 Criterio de estabilidad de Nyquist

El criterio de estabilidad de Nyquist permite determinar la estabilidad absoluta de un sistema lineal invariante en el tiempo (SLIT) en lazo cerrado, y puede aprovecharse para introducir el concepto de estabilidad relativa. Para su aplicación, únicamente se necesita conocer la respuesta frecuencial del sistema en lazo abierto. De hecho, a partir de la respuesta frecuencial en lazo abierto, el criterio de estabilidad de Nyquist permite determinar el número de raíces de la ecuación característica (polos en lazo cerrado) que existen en el semiplano derecho. Obviamente, el sistema es estable en lazo cerrado cuando el resultado de la aplicación del criterio de Nyquist es cero. Las consideraciones respecto a sistemas en lazo cerrado oscilatorios también quedan totalmente determinadas como se mostrará más adelante.

4.2.1 Teoremas de la transformación conforme y de la representación

El criterio de estabilidad de Nyquist se basa en los teoremas de la transformación conforme y el teorema de la representación, que a continuación se exponen:

* Transformación conforme: Dada F(s) analítica (continua y derivable) en todo el plano S salvo en sus polos, todo camino cerrado continuo en S que no pase por ningún punto singular de F(s) se transforma en una curva cerrada continua en el plano F(s), preservándose distancias y ángulos de corte.

La figura 4.5 muestra el teorema de la transformación conforme de un modo gráfico.

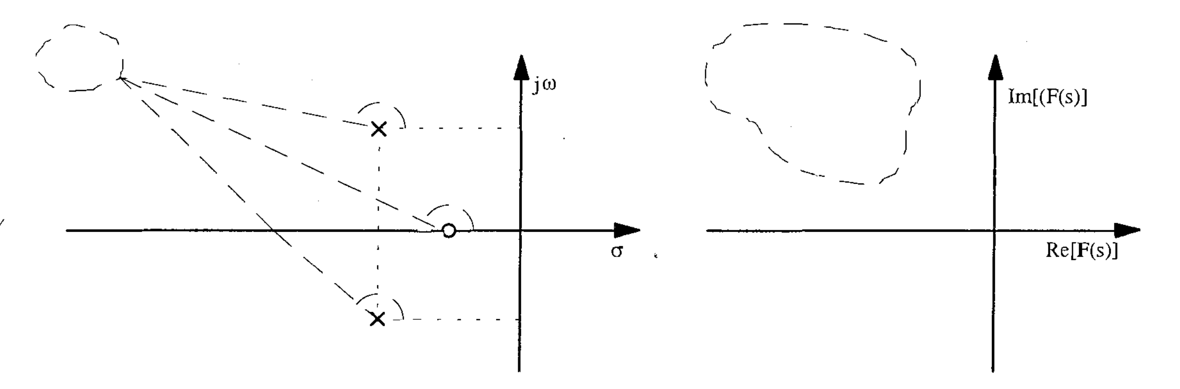


Fig. 4.5 Teorema de la transformación conforme.

* Teorema de la Representación: Dada F(s) con P polos y Z ceros, considerando inclusive su multiplicidad, incluidos en un contorno cerrado continuo del plano S recorrido en sentido horario que no pase por ningún punto singular de F(s), éste se transforma en una curva cerrada continua en el plano F(s) en la cual se producen N rodeos en sentido horario al origen, tal que:

$$N=Z-P;\ \text{donde:}\ \begin{cases} N > 0 \Rightarrow \text{Sentido horario} \\ N < 0 \Rightarrow \text{Sentido antihorario} \end{cases}$$

En la figura 4.6 se muestra el teorema de la representación de un modo gráfico. En dicha figura puede observarse que se rodea un polo de la función F(s) en sentido horario. Rodear un polo de una función en un sentido implica lograr un rodeo al origen en sentido contrario; este resultado es lógico al realizar dicho polo una contribución total de 360° de fase en la función (en oposición de fase debido a la característica de un polo). El efecto contrario se verificaría al evaluar un cero.

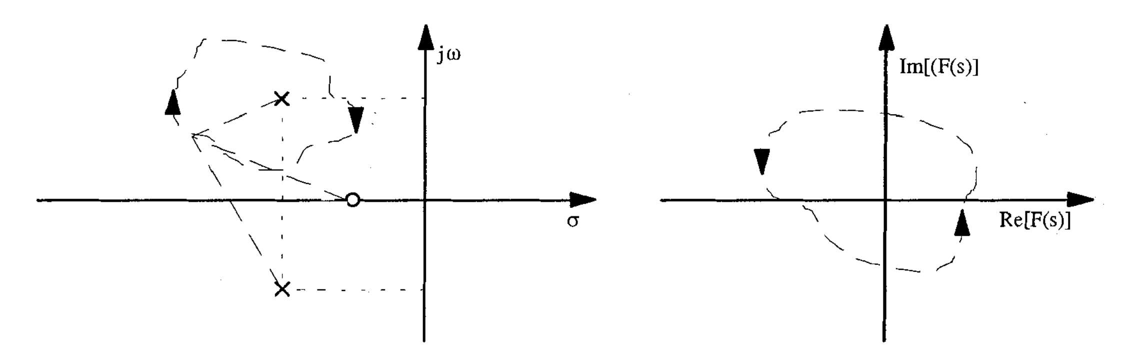


Fig. 4.6 Teorema de la representación.

El criterio de estabilidad de Nyquist escoge como función evaluable el propio polinomio característico, y evalúa la existencia de ceros de dicho polinomio en un contorno que contiene todo el semiplano derecho del plano S mediante la aplicación del teorema de la representación. Así, F(s)=1+G(s)H(s), donde se supone el conocimiento, a priori, de la función de transferencia en lazo abierto G(s)H(s) (de este modo, el parámetro P queda determinado como el número de polos en lazo abierto que se encuentran en el semiplano derecho del plano S).

Mediante la transformación del contorno denominado recorrido de Nyquist (que contiene todo el semiplano derecho del plano S) a través de la función F(s), se conocen el número de rodeos al origen en el plano F(s) (y su signo); y, por último, aplicando el teorema de la representación, se determina el número de ceros de la ecuación característica Z (polos en lazo cerrado) que existen en semiplano derecho del plano S. Obsérvese que, si bien este procedimiento es suficiente para determinar si un sistema es estable, este método permitirá además determinar la existencia de raíces de la ecuación característica sobre el eje imaginario.

4.2.2 Recorrido de Nyquist

Como ya se ha comentado, el recorrido de Nyquist, fig. 4.7., es un contorno cerrado continuo recorrido en sentido horario que contiene todo el semiplano derecho en su interior. Debe conocerse la transformación de dicho recorrido mediante la función F(s)=1+G(s)H(s) para determinar el número de rodeos al origen existentes en el plano F(s). Para poder aplicar la transformación conforme es necesario presuponer que no existen polos de F(s) (esto es, no existen polos en lazo abierto) en el eje imaginario.

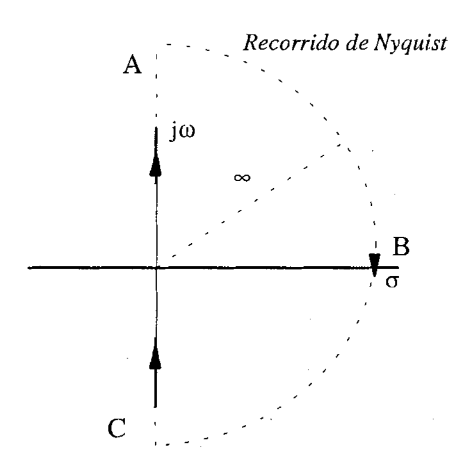


Fig. 4.7 Recorrido de Nyquist.

La transformación del recorrido de Nyquist puede descomponerse en dos tramos que a continuación se estudiarán por separado, tal y como muestra la figura 4.7.

- Transformación del tramo ABC mediante la función F(s)=1+G(s)H(s). ($s \to \infty$)

Dado que el sistema en lazo abierto es causal se cumple:

$$\lim_{s \to \infty} 1 + G(s)H(s) = \text{cte.} \qquad (4.9)$$

Donde esta constante es igual a la unidad cuando el grado del denominador es mayor que el grado del numerador en la función de transferencia en lazo abierto. En conclusión, la transformación del tramo ABC (zona del recorrido de Nyquist trazada para $s \to \infty$) no puede proporcionar rodeos al origen porque implica un único punto en el plano F(s). De este modo la transformación de este tramo no debe considerarse en el análisis del criterio de estabilidad de Nyquist.

- Transformación del tramo CA. ($s=j\omega$)

Como el tramo CA, es en definitiva el eje imaginario del plano S, en este caso:

$$1 + G(s)H(s)\big|_{s=j\omega} = 1 + G(j\omega)H(j\omega) \qquad (4.10)$$

Lo cual conlleva el estudio de la respuesta frecuencial del sistema en lazo abierto para $-\infty < \omega < \infty$. A priori, esta representación es fácil de realizar en el plano $G(j\omega)H(j\omega)$, fig. 4.8. Aplicando una modificación en la observación de los rodeos a origen en el plano $1+G(j\omega)H(j\omega)$, por rodeos al punto -1+j0 en el plano $G(j\omega)H(j\omega)$, pueden extraerse las mismas consideraciones. De este modo, puede afirmarse que la existencia de rodeos al punto -1+j0 por parte del diagrama polar en el plano $G(j\omega)H(j\omega)$, implica la existencia de polos en el semiplano derecho del plano S en lazo cerrado, por lo que el sistema es inestable.

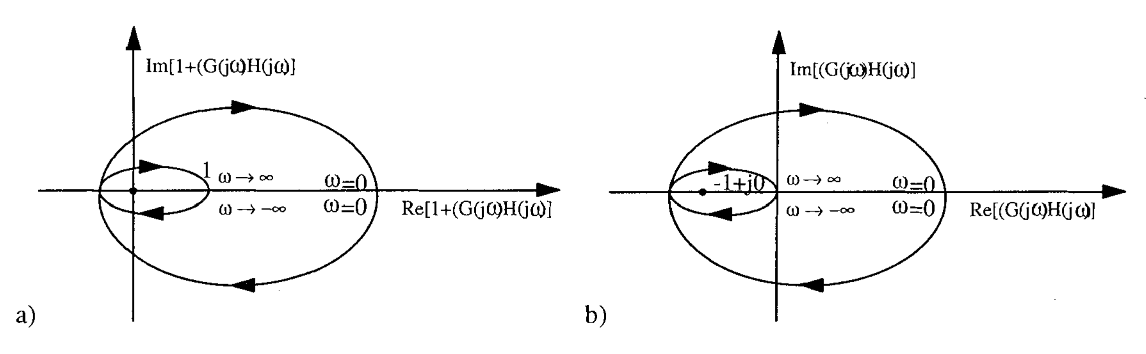


Fig. 4.8 Diagrama de Nyquist, a) en plano $1+G(j\omega)H(j\omega)$ *y b) en plano* $G(j\omega)H(j\omega)$.

Se denomina diagrama de Nyquist a la transformación del recorrido de Nyquist. El diagrama de Nyquist ($-\infty \leq \omega < \infty$) se obtiene a partir del diagrama polar dado que se verifica la propiedad

$$(0 \leq \omega < \infty): \begin{cases} |G(j\omega)H(j\omega)| = |G(-j\omega)H(-j\omega)| \\ \angle G(j\omega)H(j\omega) = -\angle G(-j\omega)H(-j\omega) \end{cases} \quad (4.11)$$

En conclusión, el diagrama de Nyquist se realiza a partir del diagrama polar conjuntamente con su simétrico respecto al eje real.

4.2.3 Criterio de estabilidad de Nyquist

Dada G(s)H(s) sin polos ni ceros en el eje imaginario s=jω, si G(s)H(s) tiene k polos en semiplano derecho del plano S y si $\lim_{s\to\infty} G(s)H(s) = \text{cte.}$, para que el lugar G(jω)H(jω) tenga estabilidad al variar ω desde -∞ a ∞ deben producirse k rodeos al punto -1+j0 en sentido antihorario.

Esto es, definiendo:

N= número de rodeos a -1+j0; en sentido horario (N>0) y sentido antihorario (N<0).

P= polos en lazo abierto en semiplano derecho del plano S.

Z= polos en lazo cerrado en semiplano derecho del plano S.

Para que un sistema sea estable debe cumplir la condición: Z=N+P=0.

4.2.4 Casos típicos en el criterio de estabilidad de Nyquist

Al aplicar el criterio de estabilidad de Nyquist sobre un sistema de control se producirá uno de los siguientes casos:

1) No existe ningún rodeo a -1+j0. En este caso N=0, lo que implica Z=P. De este modo, el sistema en lazo cerrado es estable si también lo es el sistema en lazo abierto.

2) Hay uno o varios rodeos en sentido antihorario a -1+j0. En este caso el sistema en lazo cerrado es estable si el número de rodeos coincide con el número de polos en lazo abierto en semiplano derecho del plano S.

3) Hay uno o varios rodeos en sentido horario a -1+j0. El sistema lazo cerrado es inestable.

4.2.5 Existencia de singularidades en lazo abierto sobre el eje imaginario

Cuando un sistema tiene polos en lazo abierto en el eje imaginario, es necesario modificar el recorrido de Nyquist, debido a que el teorema de la representación no puede aplicarse. El nuevo recorrido de Nyquist considera todo el semiplano derecho del plano S, evitando las singularidades sobre el eje imaginario, de modo que no deban contabilizarse en el parámetro P, tal y como muestra la figura 4.9.

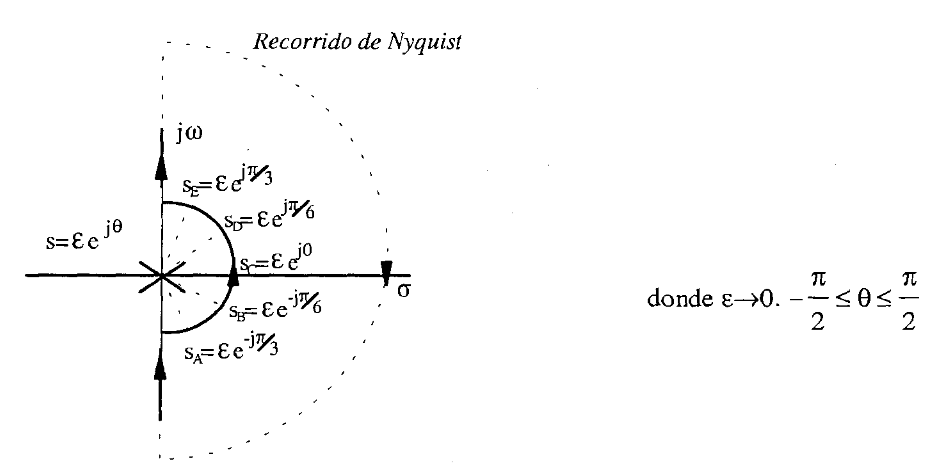
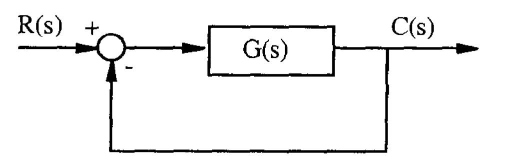


Fig. 4.9 Recorrido de Nyquist modificado.

La aparición de singularidades sobre el eje imaginario conlleva arcos de radio infinito en el plano transformado, que deberán considerarse en el estudio del número de rodeos al punto -1+j0 por parte del diagrama de Nyquist.

Ejemplo 4.1

Existe una estrecha relación entre la estabilidad deducida mediante las técnicas del lugar geométrico de las raíces y el criterio de estabilidad de Nyquist. Dado el sistema mostrado en la figura 4.10.

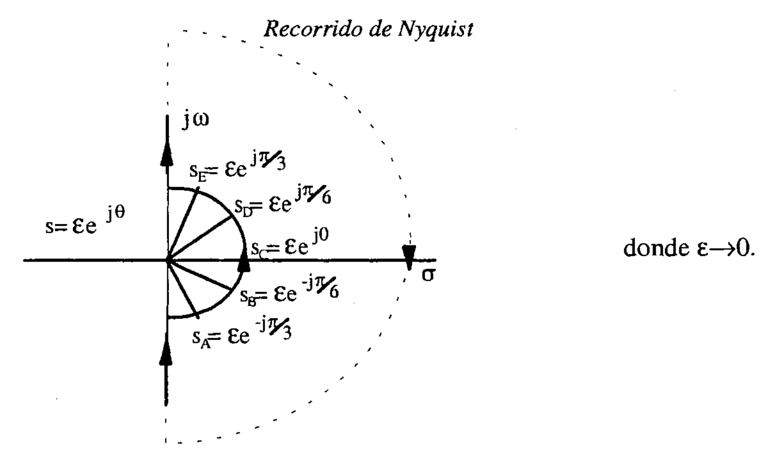


donde $G(s) = K \cdot \frac{(s+1)^2}{s^3}$

Fig. 4.10 Sistema realimentado.

a) Trazar el lugar geométrico de las raíces determinando: LGR sobre eje real, asíntotas, puntos de ruptura y cortes del LGR con el eje imaginario. Determinar el rango de valores de K para el cual el sistema es estable.

b) Obtener el *diagrama polar* del sistema en lazo abierto, descomponiendo, para ello, la respuesta frecuencial en lazo abierto en parte real e imaginaria, y determinando los valores para ω=0, 0.5, 1, 2, 5, 10 y $\omega \to \infty$. Trazar el *diagrama de Nyquist*. Para considerar el trayecto o recorrido de Nyquist modificado *alrededor del origen en el plano S*, realizar la transformación de los puntos del plano S que se muestran en la figura 4.11.



donde $\varepsilon \to 0$.

Fig.4.11 Recorrido de Nyquist modificado.

Determinar la estabilidad absoluta del sistema en lazo cerrado para K=0.25, 0.5 y 1, aplicando el criterio de estabilidad de Nyquist.

c) Relacionar los resultados de los apartados a) y b). Razonar la respuesta.

Solución:

a) El Lugar Geométrico de las raíces resultante puede observarse en la figura 4.12, donde únicamente existe una asíntota que corresponde con el eje real y aparecen puntos de ruptura en s=-3, como puede comprobarse:

$$K = -\frac{s^3}{(s+1)^2};\frac{dK}{ds} = 0 \Rightarrow 3\cdot s^2\cdot(s+1)^2 - 2\cdot(s+1)\cdot s^3 = 0 \Rightarrow s = -3 \Rightarrow K = \frac{27}{4}$$

Aplicando el algoritmo de Routh a la ecuación característica:

$$s^3 + K\cdot s^2 + 2K\cdot s + K = 0$$

El corte con el eje imaginario ocurre para: $s = \pm j \Rightarrow K = 1/2$. El sistema es estable para: K>1/2.

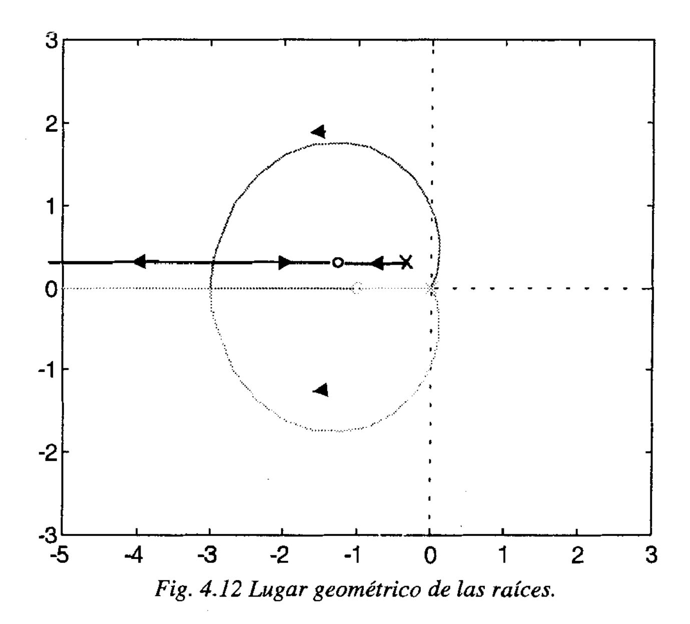


Fig. 4.12 Lugar geométrico de las raíces.

b) Diagrama polar:

$$G(s) = K \cdot \frac{(s+1)^2}{s^3} \Rightarrow G(j\omega) = K \cdot \frac{(j\omega+1)^2}{-j\omega^3} = K \cdot \frac{1+\omega^2+2j\omega}{-j\omega^3} = -\frac{2K}{\omega^2} + jK\frac{1-\omega^2}{\omega^3}$$

$$\text{Re}[G(j\omega)] = -\frac{2K}{\omega^2}; \text{Im}[G(j\omega)] = K\frac{1-\omega^2}{\omega^3}$$

A partir de estas expresiones puede realizarse la tabla 4.1.

	Re(G(jω))	Im(G(jω))
ω=0	-∞	∞
ω=0.5	-8K	6K
ω=1	-2K	0
ω=2	-K/2	-3K/8
ω=5	-2K/25	-24K/125
ω=10	-2K/100	-94K/1000
ω=∞	-0	-0

Tabla 4.1.

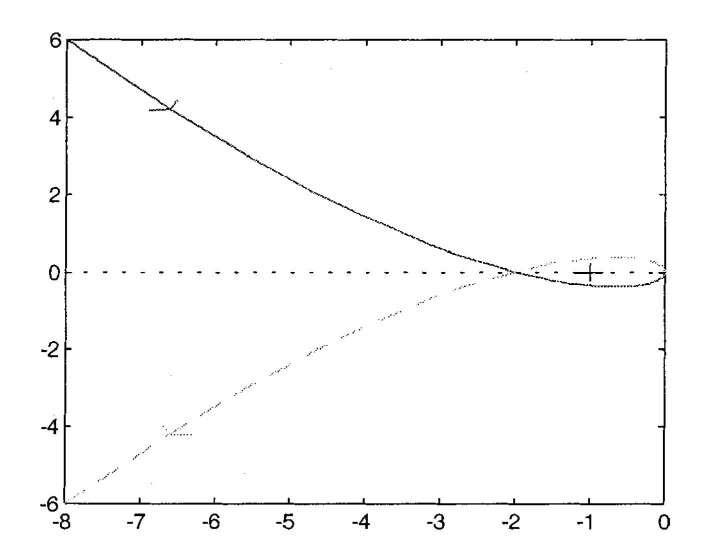
En la figura 4.13 puede observarse el diagrama polar. El diagrama de Nyquist se forma a partir del diagrama polar realizando los rodeos en infinito adecuados, debido a la aparición de un polo en lazo abierto en origen. Para ello, se realizan las transformaciones de los puntos (s_A, s_B, s_C, s_D y s_E) que se muestra en el enunciado del problema. $s = \varepsilon \cdot e^{j\theta}$

$$G(s) = K \cdot \frac{(\varepsilon \cdot e^{j\theta} + 1)^2}{(\varepsilon \cdot e^{j\theta})^3} \rightarrow K \cdot \frac{e^{-j3\theta}}{\varepsilon^3} \quad \text{ya que } \varepsilon \rightarrow 0$$

De este modo, se puede obtener la tabla 4.2.

Pto. Inicial	Pto. Transformado
$s_A = \varepsilon \cdot e^{-j\pi/3}$	$\infty \cdot e^{j\pi}$
$s_B = \varepsilon \cdot e^{-j\pi/6}$	$\infty \cdot e^{j\pi/2}$
$s_C = \varepsilon \cdot e^{j0}$	$\infty \cdot e^{j0}$
$s_D = \varepsilon \cdot e^{j\pi/6}$	$\infty \cdot e^{-j\pi/2}$
$s_E = \varepsilon \cdot e^{j\pi/3}$	$\infty \cdot e^{-j\pi}$

Tabla 4.2.



Fig, 4.13 Diagrama de Nyquist para K=1 (línea continua) y simétrico (línea discontinua)

En conclusión, puede aplicarse el criterio de estabilidad de Nyquist resultando:

* K=0.25. Cort

* K=0.5. Corte

* K=1. Corte
observarse que

c) Los resultad
Nyquist, deben
Por esta razón,
métodos.

4.3 Cuantific
Ganancia (M

El criterio de es
cerrado, observ
semiplano dere
punto -1+j0 (ve
situación, existe
GLA(jωc)=-1, es
oscilatorio.

Para mostrar la
las raíces (figura

En estas gráficas
k=200 el sistema

* K=0.25. Corte del diagrama polar con el eje real en -0.5. N=2 y Z=N+P=2. Sistema inestable.

* K=0.5. Corte del diagrama polar con el eje real en -1. Sistema oscilatorio.

* K=1. Corte del diagrama polar con el eje real en -2. Z=N+P=-1+1=0. Sistema estable. Debe observarse que en este caso existen dos rodeos (uno en sentido horario y otro en sentido antihorario).

c) Los resultados obtenidos mediante el lugar geométrico de las raíces y mediante el diagrama de Nyquist, deben ofrecer las mismas conclusiones respecto a la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Por esta razón, el margen de valores de K para el cual el sistema es estable es el mismo en ambos métodos.

4.3 Cuantificación de la estabilidad relativa. Margen de Fase (MF) y Margen de Ganancia (MG)

El criterio de estabilidad de Nyquist permite determinar la estabilidad absoluta de un sistema en lazo cerrado, observando, para ello, la cantidad de raíces de la ecuación característica existentes en semiplano derecho del plano S. Cuando el diagrama polar del sistema en lazo abierto contenga al punto -1+j0 (ver figura 4.14), el criterio de estabilidad de Nyquist queda indeterminado. En esta situación, existe una frecuencia para la cual la ecuación característica tiene una solución de la forma $G_{LA}(j\omega_c)=-1$, esto es, existe una raíz en $s=j\omega_c$, lo cual implica que el sistema en lazo cerrado es oscilatorio.

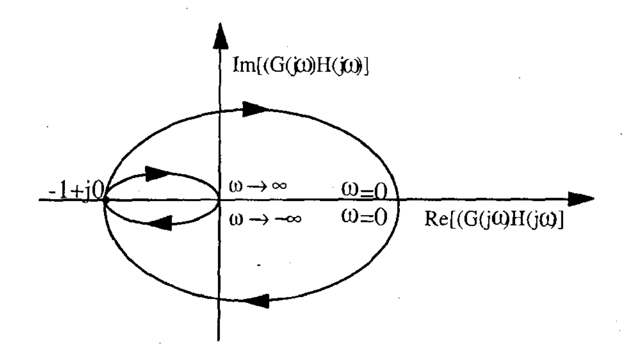


Fig. 4.14 Diagrama polar contiene al punto -1+j0.

Para mostrar la propiedad anteriormente comentada, obsérvese, por ejemplo, el lugar geométrico de las raíces (figura 4.15) y los diagramas de Nyquist (figura 4.16) del sistema:

$$G_{LA}(s)=\frac{k}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)}$$

En estas gráficas se comprueba como para k=60 el sistema es oscilatorio, para k=10 es estable y para k=200 el sistema es inestable.

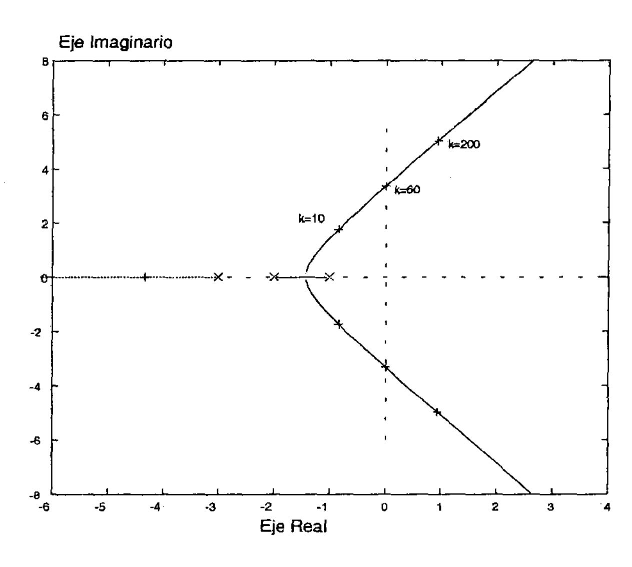


Fig. 4.15 Lugar geométrico de las raíces.

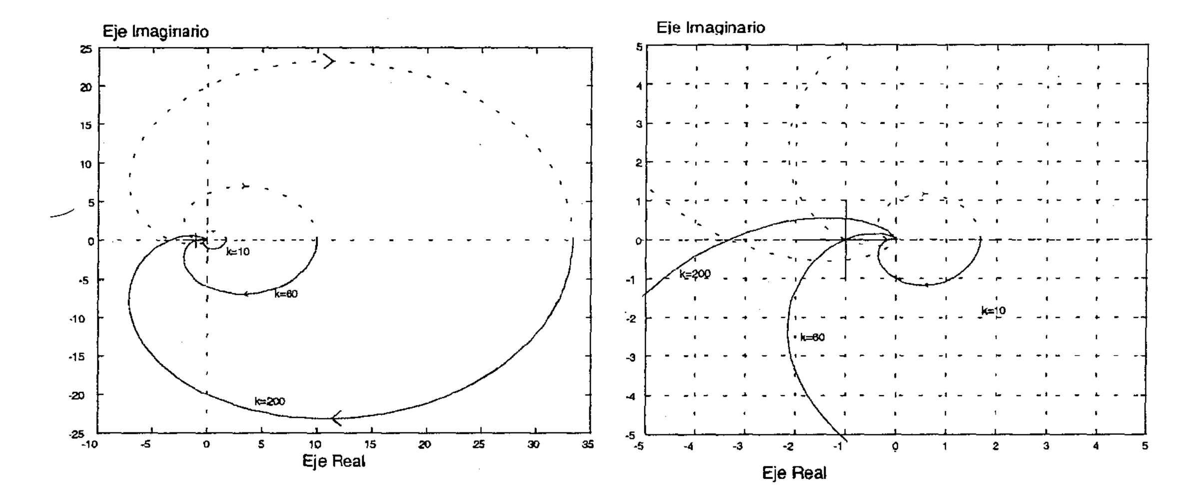
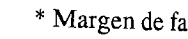


Fig. 4.16 Diagramas de Nyquist para los valores k=10,60 y 200.

En sistemas de fase mínima, cuanto más cerca se ubique el diagrama polar de GLA(jω) del punto -1+j0, más riesgo de inestabilidad presenta el sistema. De este modo, se puede utilizar la proximidad de GLA(jω) al punto -1+j0 como una medida de la estabilidad relativa del sistema. Cuantitativamente se puede definir la estabilidad relativa como una medida de la cercanía del sistema a la inestabilidad. La medida del margen de fase y margen de ganancia permite determinar el grado de estabilidad relativa del sistema. Así, cuando estos parámetros adquieren un valor elevado, el sistema se encuentra alejado de la inestabilidad y presentará una respuesta con un valor bajo de máximo sobreimpulso en su dinámica. El margen de fase y el margen de ganancia se definen:



* Margen de fa

MF = 1

donde ωt se den
se mide median

De este modo, e
permaneciendo e

* Margen de gan

MG =

donde ωi es la fre

De este modo, el
abierto permaneci

Fig. 4.17 Me

* Margen de fase: MF.

$$MF = 180^{o} + \angle G_{LA}(j\omega_t)\,;\ \text{donde } \omega_t / \left|G_{LA}(j\omega_t)\right| = 1 \text{ ó } 20\log\left|G_{LA}(j\omega_t)\right|_{dB} = 0dB \qquad (4.12)$$

donde ω_t se denomina frecuencia de transición del sistema y, como puede observarse en la expresión, se mide mediante la función de transferencia en lazo abierto.

$$\text{Criterio: } \begin{cases} MF > 0 \Rightarrow \text{Sistema estable} \\ MF < 0 \Rightarrow \text{Sistema inestable} \end{cases}$$

De este modo, el margen de fase es la cantidad de fase que puede quitarse al sistema en lazo abierto permaneciendo estable el sistema en lazo cerrado.

* Margen de ganancia: MG.

$$MG = \frac{1}{\left|G_{LA}(j\omega_i)\right|} \text{ ó } MG_{dB} = -20\log\left|G_{LA}(j\omega_i)\right|_{dB}\,;\ \text{donde } \omega_i / \angle G_{LA}(j\omega_i) = \pm 180^{o} \qquad (4.13)$$

donde ω_i es la frecuencia para la cual el sistema el lazo abierto adquiere $\pm\ 180^{o}$.

$$\text{Criterio: } \begin{cases} MG > 1\ (MG_{dB} > 0\ dB) \Rightarrow \text{Sistema estable} \\ MG < 1\ (MG_{dB} < 0\ dB) \Rightarrow \text{Sistema inestable} \end{cases}$$

De este modo, el margen de ganancia es la cantidad de ganancia que puede añadirse al sistema en lazo abierto permaneciendo estable el sistema en lazo cerrado.

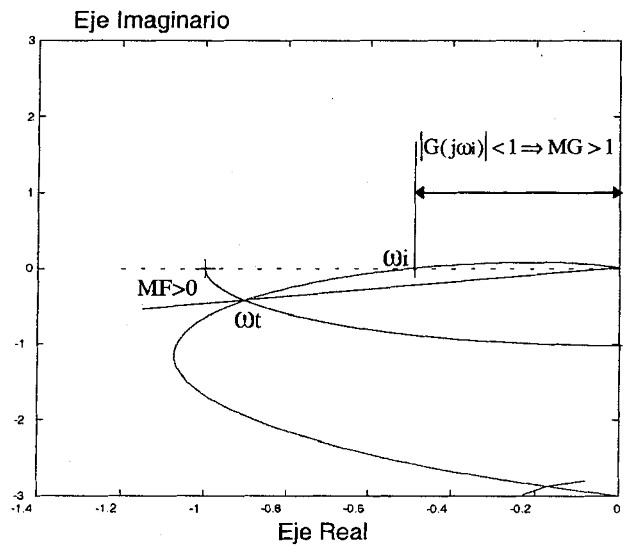


Fig. 4.17 Medición del margen de fase y el margen de ganancia en el diagrama polar para k=30.

En las figuras 4.17-20 pueden observarse las mediciones del margen de fase y el margen de ganancia en el diagrama polar y el diagrama de Bode para diversos valores de k del sistema:

$$G_{LA}(s) = \frac{k}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot(s+3)}$$

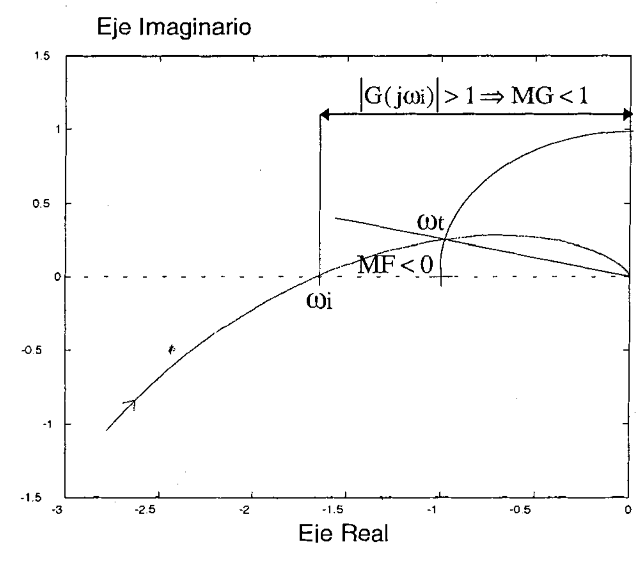


Fig. 4.18 Medición del margen de fase y el margen de ganancia en el diagrama polar para k=100.

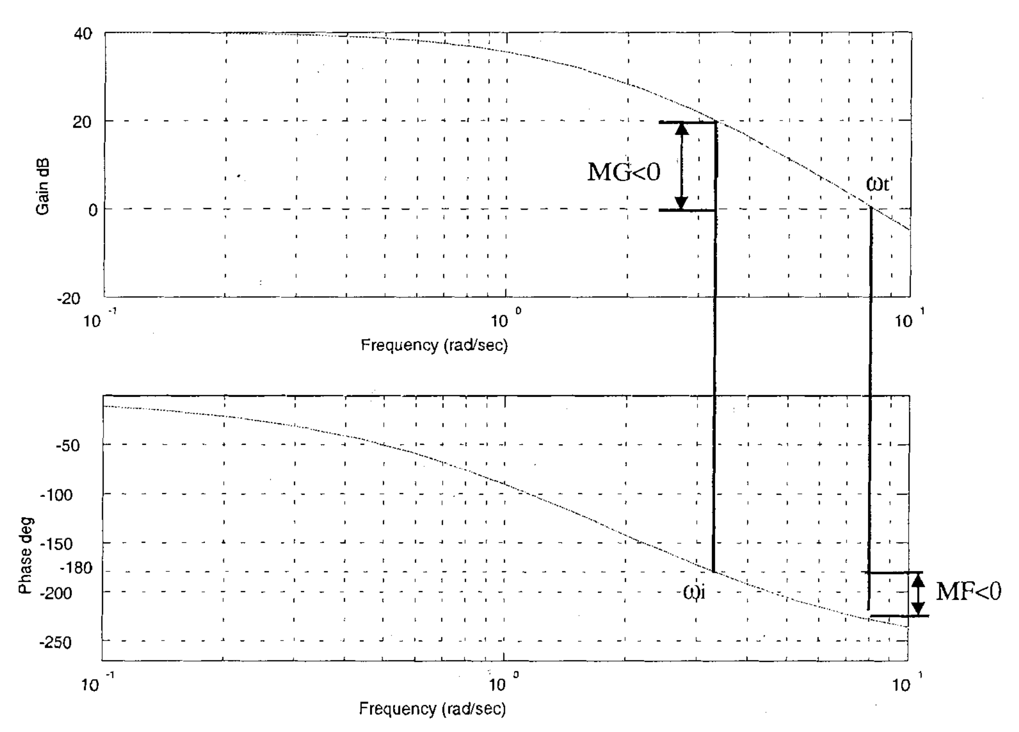


Fig. 4.19 Medición del margen de fase y el margen de ganancia en el diagrama de Bode para k=600.

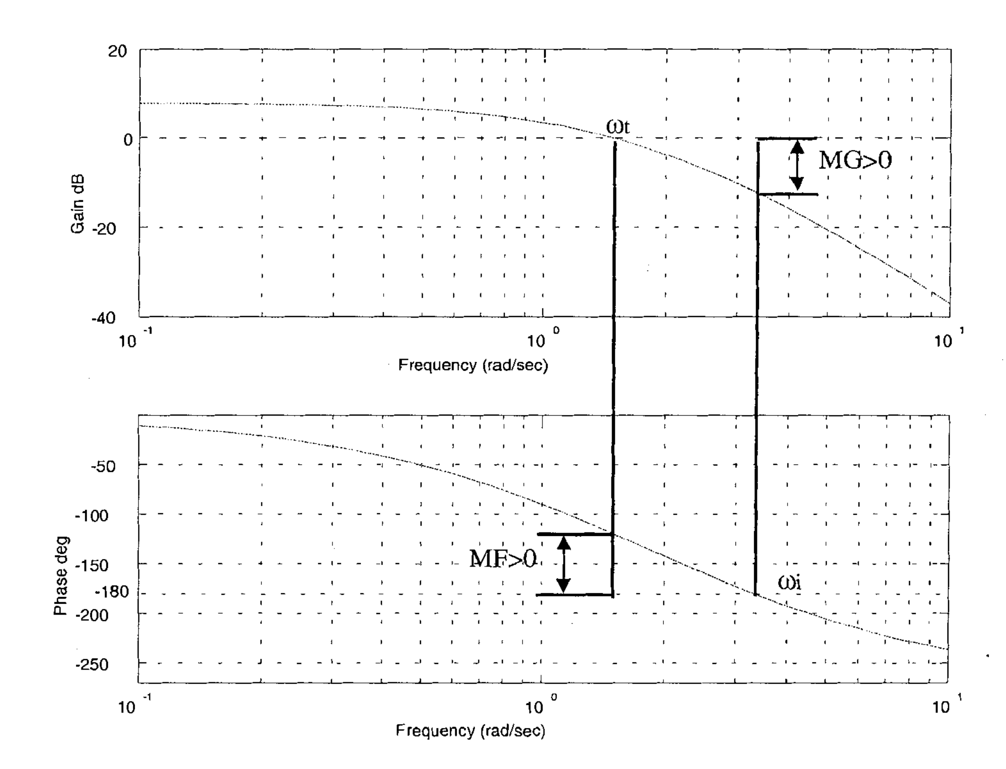


Fig. 4.20 Medición del margen de fase y el margen de ganancia en el diagrama de Bode para k=15.

Ejemplo 4.2

Dado el sistema de la figura 4.21:

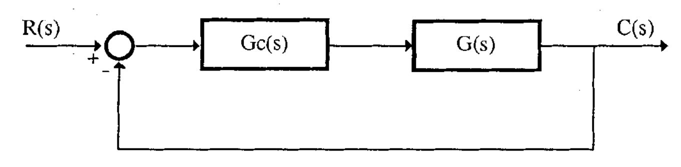


Fig. 4.21 Sistema de control.

donde: $G(s) = \dfrac{50}{s \cdot (s+5) \cdot (s+10)}$ y $Gc(s) \equiv$ función de transferencia del control.

1.- Suponer un control Proporcional: Gc(s) = k.

1.1.- Calcular el valor de **k** para tener un error estático de velocidad del 1 %.

1.2.- Determinar cuál es el margen de fase del sistema con la **k** calculada en el apartado anterior e indicar la estabilidad absoluta del sistema.

2.- Para mejorar la estabilidad relativa del sistema se introduce un control proporcional derivativo:

$$Gc(s) = k_p + k_d \cdot s = k \cdot (a \cdot s + 1)$$

2.1.- ¿Qué valor debe tener **k** para tener un error estático de velocidad del 1%? Razonar la respuesta.

2.2.- Calcular la frecuencia de transición (ω_t) y el margen de fase del sistema compensado para los casos: a = 1 y a = 0.2. ¿Qué valor de **a** de los proporcionados tomaría usted?. Razonar la respuesta.

2.3.- En la figura 4.22 se adjuntan las respuestas de los sistemas anteriores para una entrada en escalón. Indicar qué figura corresponde a **a=1** y cual a **a=0.2**. Razonar la respuesta.

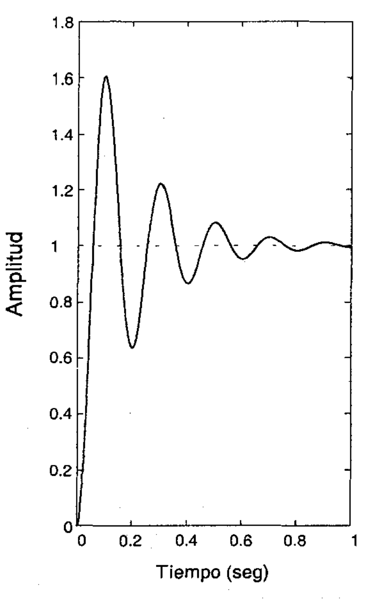


Figura 1

Amplitud

Tiempo (seg)

Figura 2

Fig. 4.22 Respuestas al escalón de entrada para a=1 y a=0.2.

Solución:

1.1.- Error estacionario de velocidad de 1%.

$$essv = \frac{1}{k_v} \Rightarrow k_v = \lim_{s \to 0} s \cdot GLA(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{50 \cdot k}{s \cdot (s+5) \cdot (s+10)} = 100 \Rightarrow k = 100$$

De este modo la función de transferencia de la planta resulta:

$$GLA(s) = \frac{100}{s \cdot (0.2s + 1) \cdot (0.1s + 1)}$$

1.2.- Cálculo del margen de fase.

* Cálculo de la frecuencia de transición:

Debemos expresar la respuesta frecuencial de la planta para poder realizar el diagrama de Bode:

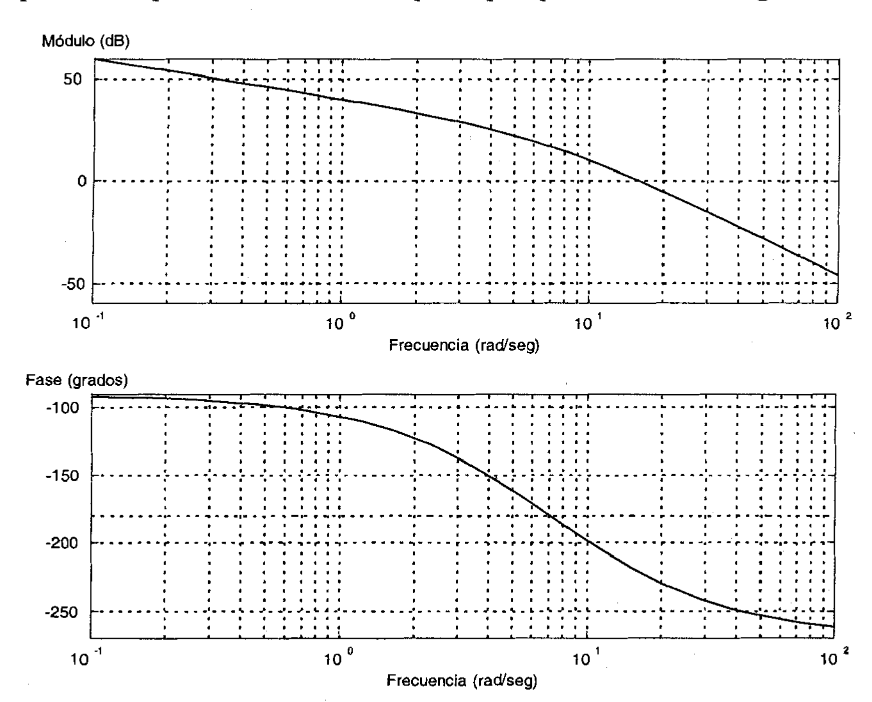


Fig. 4.23 Diagrama de Bode de la planta.

$$|GLA(j\omega)|_{dB} = 20 \log 100 - 20 \log\omega - 20 \log\left|\frac{j\omega}{5} + 1\right| - 20 \log\left|\frac{j\omega}{10} + 1\right|$$

$$FASE[GLA(j\omega)] = -90^{o} - \operatorname{arctg}\frac{\omega}{5} - \operatorname{arctg}\frac{\omega}{10}$$

De este modo, a partir del diagrama de Bode podemos calcular:

$$20 \log 100 - |GLA(j\omega)|_{dB\ \omega=5} = 20 \log \frac{5}{1} \Rightarrow |GLA(j\omega)|_{dB\ \omega=5} = 26dB; \quad 14dB - 0dB = 60 \log \frac{\omega_t}{10} \Rightarrow \omega_t = 17.113$$

Obsérvese que de 5 a 10 rad/seg existe una octava a -40 dB/dec.

* Cálculo del margen de fase:

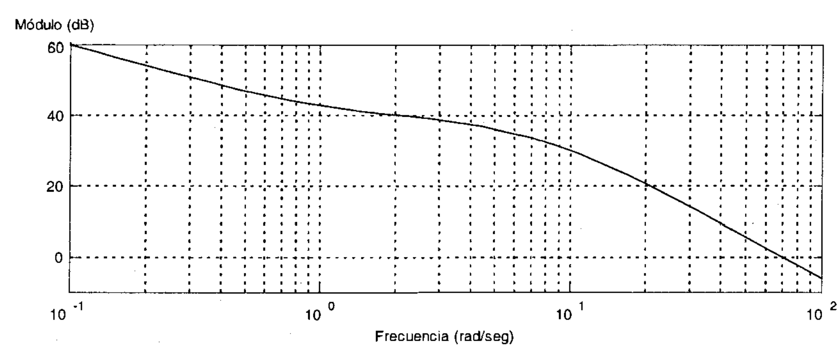
$$FASE[GLA(j\omega_t)] = -90^o - \text{arctg}\frac{\omega_t}{5} - \text{arctg}\frac{\omega_t}{10} = -223.4^o \Rightarrow MFo = 180^o + FASE[GLA(j\omega_t)] = -43.4^o$$

El margen de fase del sistema resulta negativo y por ello podemos decir que el sistema es inestable.

2.1.- La acción derivativa del control proporcional derivativo no afecta al estado estacionario del sistema, por ello k debe tener el mismo valor que en el apartado anterior para garantizar el mismo error estático, así k=100.

2.2.- Cuando a = 1:

$$GLA(s) = \frac{100 \cdot (s+1)}{s \cdot (0.2s+1) \cdot (0.1s+1)}$$



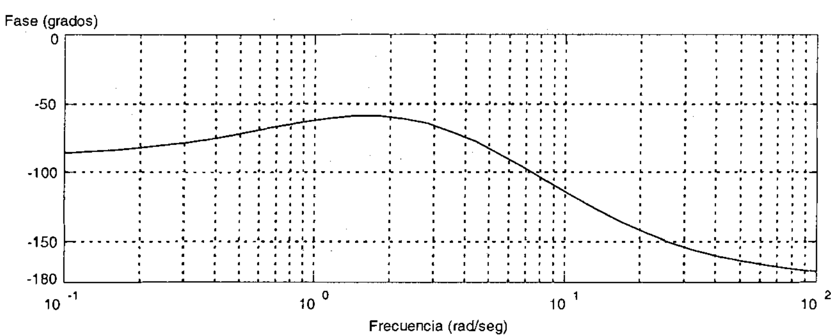


Fig. 4.24 Diagrama de Bode con a=1.

Frecuencia de transición y margen de fase:

$$|GLA(j\omega)|_{dB}\Big|_{\omega=10} = 40dB - 6dB \Rightarrow 34dB - 0dB = 40 \log \frac{\omega_t}{10} \Rightarrow \omega_t = 70.8 \text{ rad/seg}$$

Obsérvese que de 5 a 10 rad/seg existe una octava a -20 dB/dec.

$$FASE[GLA(j\omega_t)] = -90^o - \text{arctg}\frac{\omega_t}{5} - \text{arctg}\frac{\omega_t}{10} + \text{arctg}\ \omega_t = -168.73^o \Rightarrow MFo = 180^o + FASE[GLA(j\omega_t)] = 11.27^o$$

Cuando a=0.2:

$$\mathrm{GLA}(s) = \frac{100\cdot(0.2s+1)}{s\cdot(0.2s+1)\cdot(0.1s+1)} \Rightarrow \mathrm{GLA}(s) = \frac{100}{s\cdot(0.1s+1)}$$

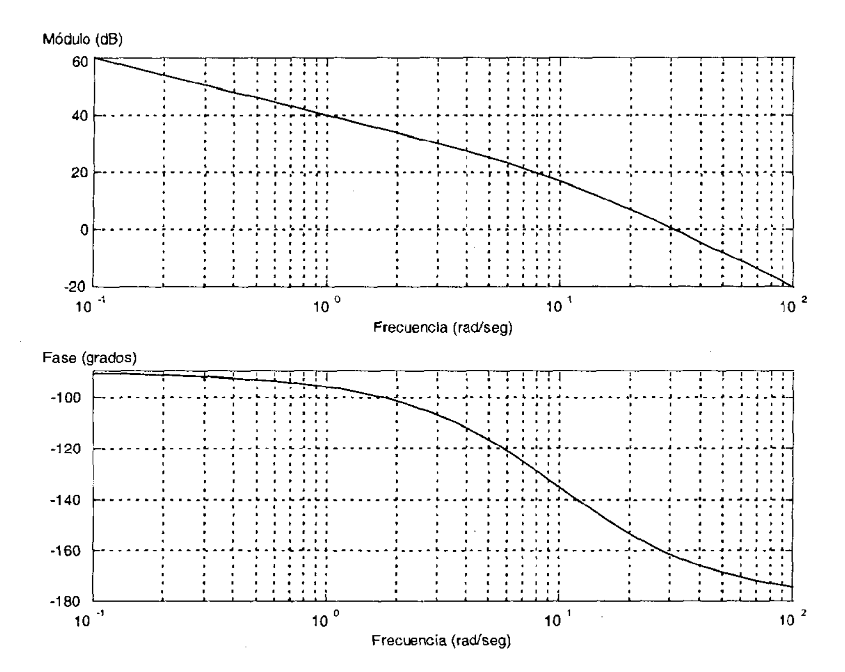


Fig. 4.25 Diagrama de Bode con a=0.2.

Frecuencia de transición y margen de fase:

$$\left|\mathrm{GLA}(j\omega)\right|_{\substack{\mathrm{dB}\\ \omega=10}} = 40\mathrm{dB} - 20\mathrm{dB} = 20\mathrm{dB} \Rightarrow 20\mathrm{dB} - 0\mathrm{dB} = 40\log\frac{\omega_t}{10} \Rightarrow \omega_t = 31.62 \text{ rad / seg}$$

$$\mathrm{FASE}\left[\mathrm{GLA}(j\omega_t)\right] = -90^{\circ} - \mathrm{arctg}\frac{\omega_t}{10} + \mathrm{arctg}\ \omega_t = -162.45^{\circ} \Rightarrow \mathrm{MFo} = 180^{\circ} + \mathrm{FASE}\left[\mathrm{GLA}(j\omega_t)\right] = 17.55^{\circ}$$

Debemos escoger aquel valor de **a** que nos proporcione mayor estabilidad relativa, esto es, mayor margen de fase, por ello se considera a = 0.2.

2.3.- El margen de fase está directamente relacionado con la estabilidad relativa, lo cual, visto desde el punto de vista temporal, implica menor sobreimpulso de la señal amortiguada; de este modo, la respuesta temporal de mayor sobreimpulso (Figura 2) corresponde con el sistema de menor margen de fase, esto es, a = 1. La frecuencia de transición está relacionada con el ancho de banda en lazo cerrado y con la velocidad de respuesta; así, el sistema de a = 1 responde con una frecuencia amortiguada mayor que el sistema de a = 0.2 (Figura 1) porque su frecuencia de transición es mayor.

4.4 Respuesta frecuencial de sistemas de tiempo discreto

Dado el sistema discreto de la figura 4.26:

$$E(z) \longrightarrow \boxed{G(z)} \longrightarrow C(z)$$

Fig, 4.26 Sistema realimentado de tiempo discreto.

$$\text{donde: } E(z) = Z[\text{sen}(\omega t)] = \frac{z \cdot \text{sen}(\omega T)}{\left(z - e^{j\omega T}\right)\cdot\left(z - e^{-j\omega T}\right)}$$

En el sistema definido, se obtiene el régimen permanente senoidal considerando la respuesta del sistema estable cuando el tiempo tiende a infinito y se posee una señal de entrada senoidal.

$$C(z) = \frac{G(z) \cdot z \cdot \text{sen}(\omega T)}{\left(z - e^{j\omega T}\right)\cdot\left(z - e^{-j\omega T}\right)} \tag{4.14}$$

Para obtener la antitransformada Z debe desarrollarse C(z) en fracciones parciales.

$$C(z) = \frac{k1 \cdot z}{\left(z - e^{j\omega T}\right)} + \frac{k2 \cdot z}{\left(z - e^{-j\omega T}\right)} + Cg(z) \tag{4.15}$$

Los dos primeros términos del desarrollo son originados por las raíces de la transformada Z de la señal senoidal muestreada, mientras que Cg(z) contiene los términos debidos a los polos de G(z). Dado que el RPS únicamente existe en sistemas estables:

$$Z^{-1}[Cg(z)] = cg(kT) \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Denominando Css(z) a la transformada Z de la señal que perdura cuando el tiempo crezca infinitamente (estado estacionario):

$$Css(z) = \frac{k1 \cdot z}{\left(z - e^{j\omega T}\right)} + \frac{k2 \cdot z}{\left(z - e^{-j\omega T}\right)} \tag{4.16}$$

Cálculo de los residuos:

$$k1 = C(z) \cdot \left.\frac{\left(z - e^{j\omega T}\right)}{z}\right|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{G\left(e^{j\omega T}\right)}{2j}; \qquad k2 = -\frac{G\left(e^{-j\omega T}\right)}{2j} \tag{4.17}$$

Debe observarse que $G\left(e^{j\omega T}\right) = G(z)|_{z=e^{j\omega T}}$ es la respuesta frecuencial del sistema discreto; esto es, debe evaluarse la función de transferencia en Z en un punto del plano ubicado sobre el círculo de radio

unidad y con fase ωT respecto a origen, donde existe una dependencia respecto a la señal de entrada. Obviamente, la evaluación de la función planteada en plano Z resulta difícil, debido a que no pueden utilizarse técnicas asintóticas para resolverla.

A partir de la descripción del procedimiento de cálculo puede indicarse que $G(e^{j\omega T})$ es una función de variable compleja, y verifica:

$$G(e^{j\omega T}) = \left|G(e^{j\omega T})\right| \cdot e^{j\angle G(e^{j\omega T})} \qquad (4.18)$$

$$G(e^{-j\omega T}) = \left|G(e^{-j\omega T})\right| \cdot e^{j\angle G(e^{-j\omega T})} = \left|G(e^{j\omega T})\right| \cdot e^{-j\angle G(e^{j\omega T})} \qquad (4.19)$$

Realizando la antitransformada de la ecuación de Css(z) se obtiene:

$$Css(kT) = k1 \cdot \left(e^{j\omega T}\right)^k + k2 \cdot \left(e^{-j\omega T}\right)^k \qquad (4.20)$$

Sustituyendo las expresiones de k1 y k2:

$$Css(kT) = \left|G(e^{j\omega T})\right| \cdot \left[\frac{e^{j(\omega kT + \angle G(e^{j\omega T}))} - e^{-j(\omega kT + \angle G(e^{j\omega T}))}}{2j}\right] = \left|G(e^{j\omega T})\right| \cdot sen\left(\omega kT + \angle G(e^{j\omega T})\right)$$

(4.21)

En conclusión, la respuesta de un sistema discreto en RPS es una señal senoidal con igual frecuencia que la señal de entrada, con amplitud igual al producto de la amplitud de entrada por el módulo de la respuesta frecuencial y con fase igual a la suma de fases de la señal de entrada y la fase de su respuesta frecuencial. De este modo, no es necesario realizar la antitransformada Z para determinar cuál es la salida de un sistema discreto estable en RPS.

Ejemplo 4.3

Considérese el sistema definido por :

$$x(KT) = U(KT) + a\,x((K-1)T) \qquad 0<a<1$$

donde U(KT) es la entrada al sistema y x(KT) es la salida. Obtenga la salida en *régimen estacionario* $x_{SS}(KT)$ cuando la entrada es U(KT)=A sin(KωT).

Solución:

$$X[z] = U[z] + a \cdot z^{-1} X[z] \qquad G[z] = \frac{X[z]}{U[z]} = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}}$$

sustituimos $z = e^{j\omega T}$

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega T}} = \frac{1}{1 - a \cdot \cos\omega T + j \cdot a \cdot \sin\omega T}$$

$$\left|G(e^{j\omega T})\right| = M = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \cos\omega T}}$$

$$\text{fase}\left\{G(e^{j\omega T})\right\} = \theta = -\text{arctg}\frac{a \cdot \sin\omega T}{1 - a \cdot \cos\omega T}$$

$$X_{SS}(KT) = A\ M \sin(K\omega T + \theta)$$

4.4.1 Características de la respuesta frecuencial

Existen importantes diferencias entre la respuesta frecuencial de un sistema de tiempo continuo y la respuesta frecuencial de un sistema de tiempo discreto; entre estas consideraciones a tener en cuenta, destacan:

1- Es periódica de periodo ωs, dado el efecto de bandas repetidas en plano S que se produce en un sistema muestreado. Así, en conclusión, la respuesta frecuencial no debe evaluarse, en general, en plano Z, debido a que se realizarán múltiples vueltas sobre el círculo de radio unidad en plano Z a medida que aumente la frecuencia de la señal de entrada.

2- La respuesta frecuencial trazada en plano transformado bilineal (W) no será periódica, debido a que únicamente contiene la información de la banda primaria del sistema discreto en plano S. Sin embargo, esta sentencia no es muy importante, dado que, en su funcionamiento correcto, el sistema discreto utilizará señales que verificarán el teorema de Shannon. Ello conlleva un análisis detallado de la evaluación de la respuesta frecuencial mediante la transformada bilineal, debido a que la información aparece con una distorsión en el eje frecuencial; en conclusión, deberá considerarse la relación no lineal existente entre la frecuencia bilineal y la frecuencia real de la señal.

3- Aplicando la transformada bilineal:

$G(w) = G(z)\Big|_{z=\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}} \Rightarrow G(j\omega w) = G(w)\Big|_{w=j\omega w}$, pueden trazarse mediante métodos asintóticos los diagramas de Bode de $|G(j\omega w)|$ y $\angle G(j\omega w)$, que ofrecen la información de la respuesta frecuencial evaluada sobre la banda primaria, considerando:

$$\omega = \frac{2}{T} \cdot tg^{-1}\left(\frac{\omega w T}{2}\right) \Leftrightarrow \omega w = \frac{2}{T} \cdot tg\left(\frac{\omega T}{2}\right) \qquad (4.22)$$

Cuando el número de muestras por ciclo sea elevado, el sistema continuo equivalente tendrá un diagrama de Bode similar, sin distorsión, al sistema discreto. Sin embargo, a medida que aumenta la frecuencia de la señal de entrada, el número de muestras por ciclo disminuye, observándose

diferencias entre los diagramas de Bode del sistema continuo y del sistema discreto obtenido mediante la transformada bilineal.

A partir del diagrama de Bode, puede trazarse el diagrama polar de un sistema discreto, y de este modo es posible aplicar el criterio de estabilidad de Nyquist. Debe observarse que la distorsión sufrida en la transformación de frecuencias no es relevante en el diagrama polar, determinándose la estabilidad absoluta y relativa del sistema discreto sin ninguna consideración adicional, es decir, sin necesidad de conocer el número de muestras por ciclo de la señal de salida. En conclusión, podrán definirse los conceptos de margen de fase (MF) y margen de ganancia (MG) en el plano transformado bilineal (W), análogamente a como ocurría en sistemas de tiempo continuo.

Si garantizamos frecuencialmente una buena estabilidad relativa, el sistema discreto responderá adecuadamente, con independencia del nº de muestras/ciclo y del nº de muestras/cte. de tiempo. En el diseño en el dominio temporal, estos parámetros debían observarse para garantizar una buena descripción de la respuesta del sistema discreto.

Ejemplo 4.4

Dado el sistema de la figura 4.27:

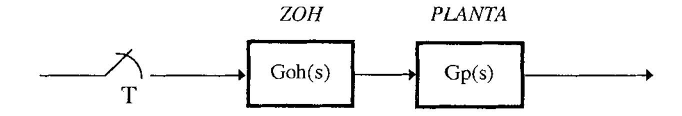


Fig. 4.27 Sistema discreto en lazo abierto.

$$\text{donde:}\quad Goh(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s};\quad Gp(s) = \frac{10}{(s+10)};\quad G(s) = Goh(s)\cdot Gp(s)$$

Se pide:

1.1- Con T=0.01 seg. encontrar la transformada bilineal de G(s) {G(w)}.

1.2.- Comparar los polos y ceros, así como la ganancia en continua (para w=0, s=0) de la función G(w) con los de la función Gp(s).

1.3.- ¿Queda distorsionado el diagrama de Bode de la función de transferencia G(w) respecto al diagrama de Bode de Gp(s) a bajas frecuencias? Razonar la respuesta.

2.1.- Con T=1 seg. encontrar la transformada bilineal de G(s) {G(w)}.

2.2.- Comparar los polos y ceros, así como la ganancia en continua (para w=0, s=0) de la función G(w) con los de la función Gp(s).

2.3.- ¿Queda distorsionado el diagrama de Bode de la función de transferencia G(w) respecto al diagrama de Bode de Gp(s) a bajas frecuencias?. Razonar la respuesta.

Dado el sistema en lazo cerrado de la figura 4.28:

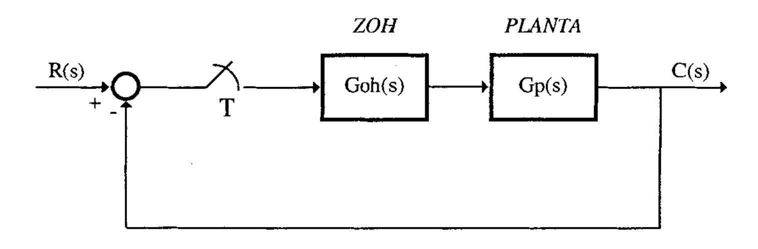


Fig. 4.28 Sistema de control discreto en lazo cerrado.

3.- Encontrar la función de transferencia C(s)/R(s) del sistema continuo, eliminando el muestreador y el mantenedor de datos.

4.- Calcular el número de muestras por constante de tiempo del sistema del apartado anterior si se muestrea la señal de salida con un periodo de T=0.01 seg. ¿Y con T=1 seg.? Relacionar los resultados obtenidos con los apartados 1 y 2.

5.- Encontrar la función de transferencia C(z)/R(z) para T=0.01 seg. y para T=1 seg. Trazar los diagramas polos-ceros en lazo cerrado (en ambos casos) y razonar los resultados, relacionándolos con los obtenidos en los apartados anteriores.

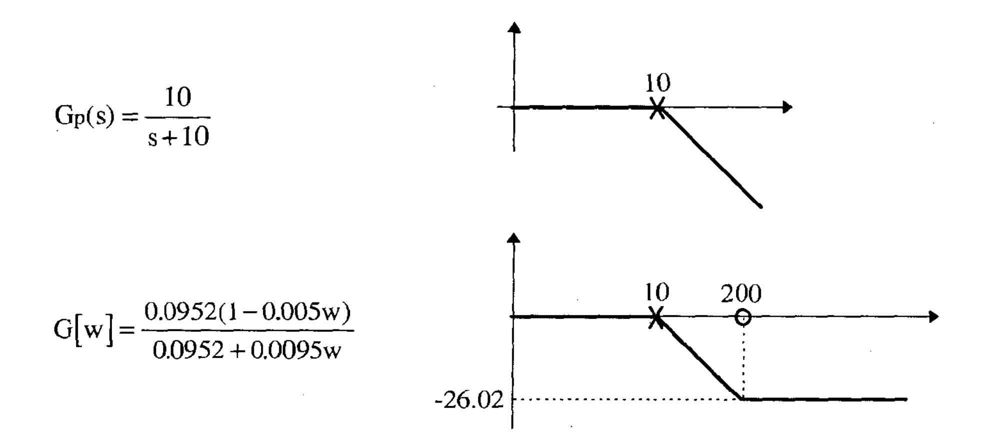
Solución:

1.- Para T = 0.01

$$G[z] = (1-z^{-1})\cdot Z\left[\frac{10}{s(s+10)}\right] = \frac{0.0952}{z-0.9048}; \quad G[w] = \frac{0.0952}{\dfrac{1+0.005w}{1-0.005w}-0.9048} = \frac{0.0952(1-0.005w)}{0.0952+0.0095w}$$

$$Gp(s)=\frac{10}{s+10}$$

$$G[w]=\frac{0.0952(1-0.005w)}{0.0952+0.0095w}$$



Ambas respuestas frecuenciales mantienen la misma posición respecto a sus polos y ganancia en continua. Pero la función G[w] tiene un cero finito más, aunque está situado muy a la derecha, es decir a altas frecuencias, y por tanto el diagrama de Bode no queda distorsionado a bajas frecuencias.

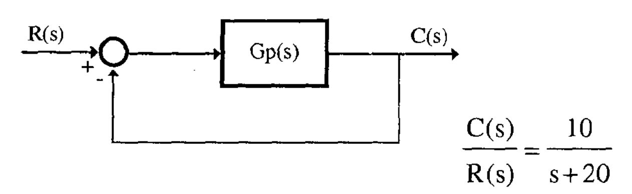
2.- Para T = 1

$$G[z]=(1-z^{-1})\cdot Z\left[\frac{10}{s(s+10)}\right]=\frac{1}{z-4.53\cdot 10^{-5}};\quad G[w]=\frac{1}{\dfrac{1+0.5w}{1-0.5w}-4.53\cdot 10^{-5}}=\frac{1-0.5w}{1+0.5w}$$

$$G[w]:\begin{cases}\text{polo en } w=-2\\ \text{cero en } w=\ 2\end{cases}$$

El cero que se introduce se sitúa sobre el polo produciendo una cancelación cero-polo en el módulo de la respuesta frecuencial, dando lugar a un diagrama de Bode plano en módulo y una variación de fase asintóticamente a -180 grados. Con lo cual sí que se distorsiona el diagrama de Bode.

3.- Diagrama de bloques del sistema continuo:



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{10}{s+20}$$

4.- Cte. de tiempo $\tau=\frac{1}{20}=0.05;\ \begin{cases}\text{Para } T=0.01 \Rightarrow \frac{\tau}{T}=\frac{0.05}{0.01}=5 \text{ muestras por cte. de tiempo}\\ \text{Para } T=1 \Rightarrow \frac{\tau}{T}=\frac{0.05}{1}=0.05 \text{ muestras por cte. de tiempo}\end{cases}$

Para T = 1 no tenemos ni una muestra por cte. de tiempo y por eso se distorsiona la transformada bilineal.

Para T = 0.01 el número de muestras es suficiente y la transformada bilineal no queda distorsionada.

5.-

$$\frac{C[z]}{R[z]}=\frac{G[z]}{1+G[z]};\quad \begin{cases} T=0.01 \Rightarrow \dfrac{C[z]}{R[z]}=\dfrac{0.0952}{z-0.8096} \\ T=1 \quad \Rightarrow \dfrac{C[z]}{R[z]}=\dfrac{1}{z+1} \end{cases}$$

La zona donde deberían ubicarse los polos para garantizar una buena simulación análoga equivalente es aquella que rodea al punto z=1 en el interior del círculo de radio unidad.

* Para T = 0.01 ⇒ polo z = 0.809 ⇒ Se sitúa dentro de la zona.

- Para T = 1 ⇒ polo z = -1 ⇒ Se sitúa fuera de la zona, y por esto el sistema continuo análogo queda distorsionado.

4.5 Problemas

Problema 1

La ecuación del controlador PID analógico es:

$$m(t)=K\cdot\left[e(t)+\frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)\cdot dt+T_d\,\frac{de(t)}{dt}\right]$$

donde e(t) es la entrada al controlador (señal de error) y m(t) es la salida del controlador (señal de control).

La función de transferencia del PID analógico es:

$$G(s)=\frac{M(s)}{E(s)}=K\cdot\left(1+\frac{1}{T_i\cdot s}+T_d\cdot s\right)$$

La función de transferencia del PID digital es:

$$G_D[z]=\frac{M[z]}{E[z]}=K_P+\frac{K_I}{1-z^{-1}}+K_D\cdot\left(1-z^{-1}\right)\qquad \text{donde}\quad K_P=K-\frac{1}{2}\cdot K_I$$

Se desea comparar el diagrama polar del controlador PID analógico con el controlador PID digital. Para ello realizar los siguientes diagramas polares para los casos:

1. Acción P analógica y acción P digital.
2. Acción I analógica y acción I digital.
3. Acción PI analógica y acción PI digital.
4. Acción D analógica y acción D digital.
5. Acción PID analógica y acción PID digital.

¿Son todas las acciones analógicas y digitales equivalentes?. ¿Es por tanto el PID analógico totalmente equivalente al PID digital?. Razonar las respuestas.

Nota:

- Dibujar **TODOS** los diagramas polares en función de la frecuencia real ω.
- Para los diagramas polares de los controles digitales dibujar hasta la máxima frecuencia que no presenta *aliasing*, sabiendo que el periodo de muestreo es T.

Solución:

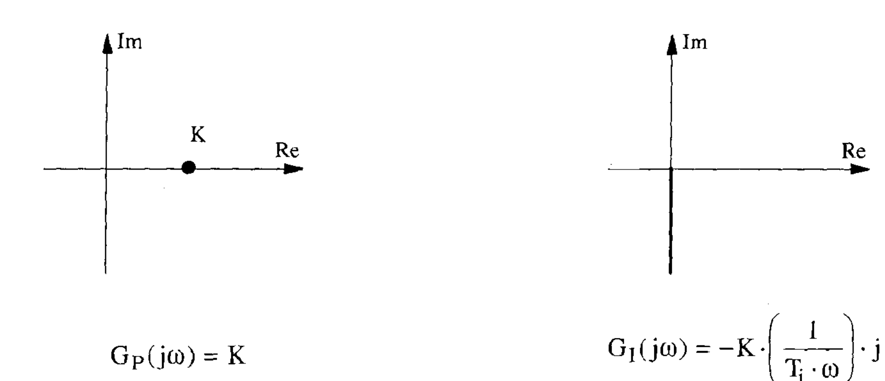
Para dibujar los diagramas polares calculamos:

$$G(j\omega) = K \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{T_i \cdot \omega} - T_d \cdot \omega\right) \cdot j\right)$$

$$G_D\left(e^{j\omega t}\right) = K_P + \frac{K_I}{2}\left(1 - j \cdot \frac{\sin(\omega \cdot T)}{1 - \cos(\omega \cdot T)}\right) + K_D\left(1 - \cos(\omega \cdot T) - j \cdot \sin(\omega \cdot T)\right)$$

La máxima frecuencia a la que no se produce *aliasing*, según el teorema del muestreo, es: $\omega_{max} = \dfrac{\pi}{T}$

1. Acción P analógico: 2. Acción I analógico:



$$G_P(j\omega) = K \qquad G_I(j\omega) = -K \cdot \left(\frac{1}{T_i \cdot \omega}\right) \cdot j$$

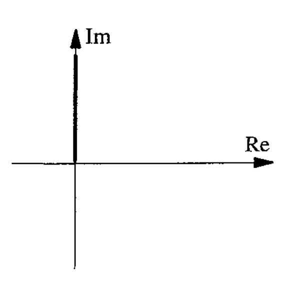
$$\omega = 0 \Rightarrow G_P(j\omega) = -\infty$$
$$\omega = \infty \Rightarrow G_P(j\omega) = 0$$

3. Acción PI analógico:

Coincide con la suma de las dos gráficas anteriores.

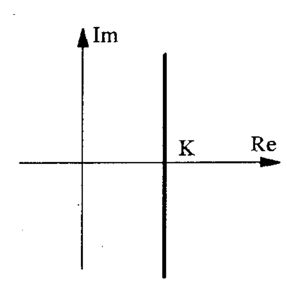
$$G_{PI}(j\omega) = K\cdot\left(1-\left(\frac{1}{T_i\cdot\omega}\right)\cdot j\right)$$

4. Acción D analógico:



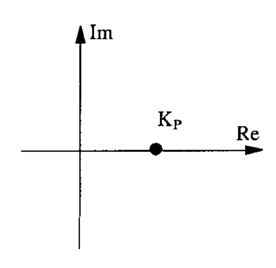
$$G_D(j\omega) = K\cdot T_d\cdot j\omega$$
$$\omega = 0 \Rightarrow G_D(j\omega) = 0$$
$$\omega = \infty \Rightarrow G_D(j\omega) = \infty$$

5. Acción PID analógico:



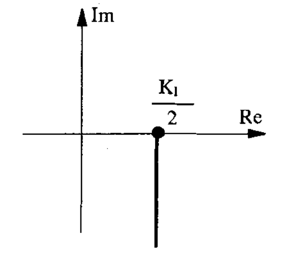
Será la suma de las gráficas que contienen las acciones PI+D.

1. Acción P digital:



$$G_{D_P}\left(e^{j\omega t}\right) = K_P$$
$$K_P = K - \frac{1}{2}\cdot K_I$$

2. Acción I digital:

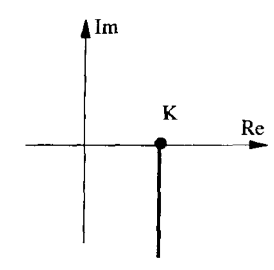


$$G_{D_I}\left(e^{j\omega t}\right) = \frac{K_I}{2}\left(1 - j\cdot\frac{\sin(\omega\cdot T)}{1-\cos(\omega\cdot T)}\right)$$

$$\omega = 0 \Rightarrow G_{D_I}(j\omega) = \infty$$

$$\omega = \frac{\pi}{T} \Rightarrow G_{D_I}(j\omega) = \frac{K_I}{2}$$

3. Acción PI digital:

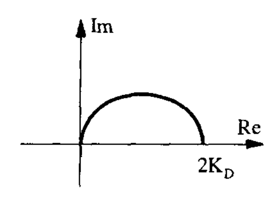


$$G_{DPI}\left(e^{j\omega t}\right) = K_P + \frac{K_I}{2}\left(1 - j\cdot\frac{\sin(\omega\cdot T)}{1-\cos(\omega\cdot T)}\right)$$

$$K_P = K - \frac{1}{2}\cdot K_I$$

$$G_{DPI}\left(e^{j\omega t}\right) = K - j\cdot\frac{K_I}{2}\frac{\sin(\omega\cdot T)}{1-\cos(\omega\cdot T)}$$

4. Acción D digital:

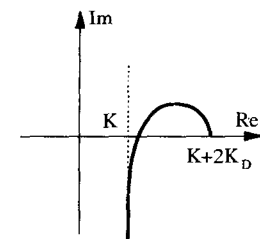


$$G_{DD}\left(e^{j\omega t}\right) = K_D\left(1-\cos(\omega\cdot T) - j\cdot\sin(\omega\cdot T)\right)$$

$$\omega = 0 \Rightarrow G_{D_D}(j\omega) = 0$$

$$\omega = \frac{\pi}{T} \Rightarrow G_{D_D}(j\omega) = 2\cdot K_D$$

5. Acción PID digital:



Coincide con la suma de las gráficas PI+D

Problema 2

El convertidor digital-analógico *"D/A Linear-Interpolator hold circuit"*, cuyo esquema circuital se presenta en la figura 1, ofrece mayor atenuación dea los armónicos de alta frecuencia que el convertidor digital-analógico más usual, Mantenedor de Orden Cero (ZOH).

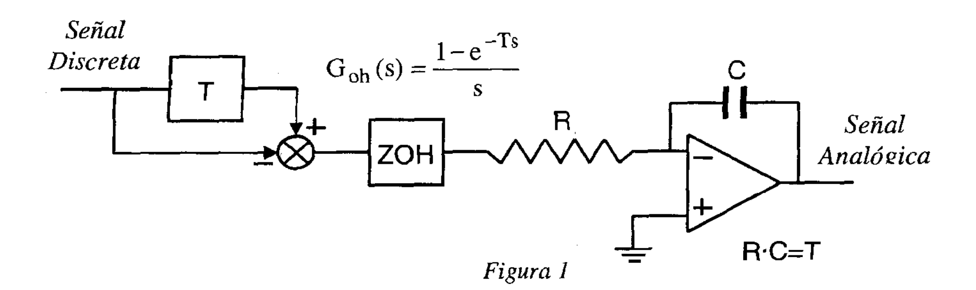


Figura 1

La función de transferencia ideal del convertidor digital-analógico *"D/A Linear-Interpolator hold circuit"* es:

$$G(s) = \frac{\left(1 - e^{-Ts}\right)^2}{T \cdot s^2}$$

En algunas aplicaciones prácticas el convertidor digital-*analógico "D/A Linear-Interpolator hold circuit"* se aproxima por un circuito más simple utilizando la técnica de *"Oversampling"*. En la figura 2 se puede observar un esquema circuital de este tipo de convertidor digital-analógico.

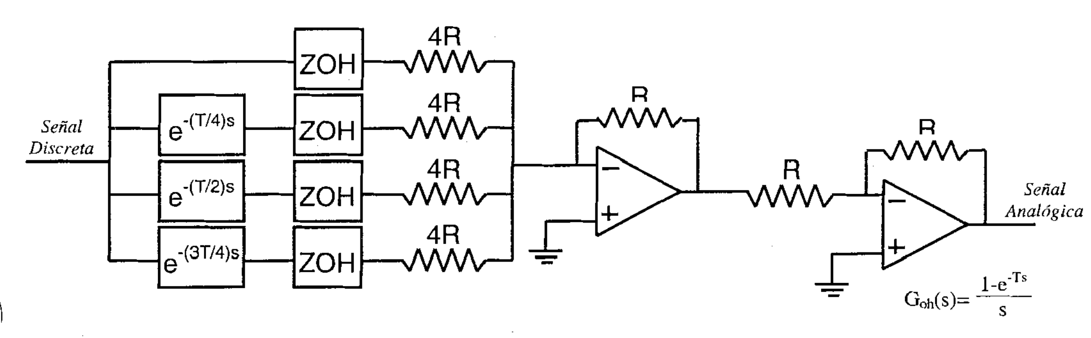


Figura 2

1.- Demostrar que la función de transferencia entrada-salida de un convertidor digital-analógico *"D/A Linear-Interpolator hold circuit"* utilizando la citada técnica de *"Oversampling"* es:

$$Go(z) = \frac{z+3}{4 \cdot z}$$

2.- Se desea demostrar que la técnica de *"Oversampling"* utilizada ofrece una buena aproximación del conversor digital-analógico *"D/A Linear-Interpolator hold circuit"*, para ello obtener la respuesta muestreada de los sistemas de la figura 3:

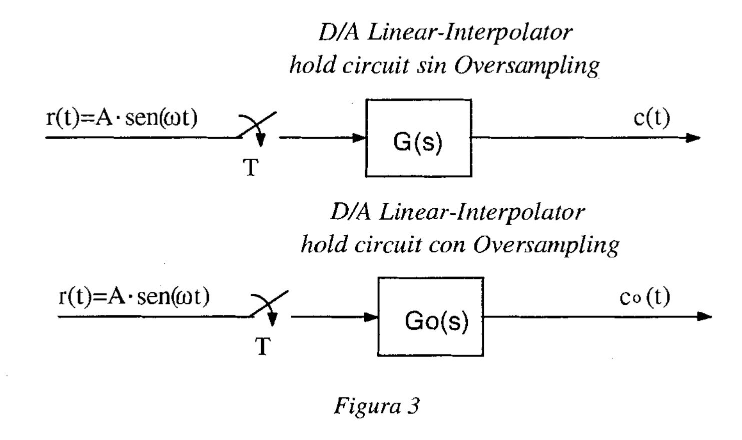


Figura 3

Obtener la r

Calcular par

• El nú
• El de
• ¿Par
respu

3.- Para mejora
muestra en l

3.1.- Calcula

3.2.- Sabiend

Calcular
casos a
ejercicio

Solución

1.- Observando e
entrada-salida:

Obtener la respuesta para los casos:

- $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{8 \cdot T}$

- $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{16 \cdot T}$

Calcular para cada uno de los sistemas:

- El número de muestras por ciclo de la señal senoidal.
- El desfase entre las senoides de entrada y salida en los dos casos anteriores.
- ¿Para cual de las dos frecuencias utilizadas se obtiene mejor aproximación? Razonar la respuesta.

3.- Para mejorar el rango de validez de la aproximación considérese un filtrado posterior como se muestra en la figura 4:

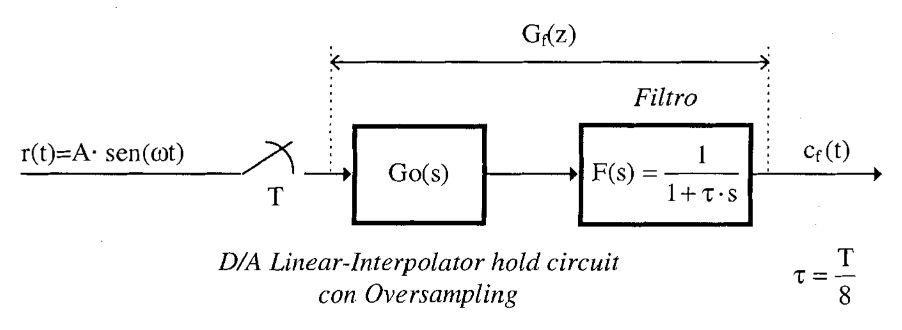


Figura 4

3.1.- Calcular Gf(z).

3.2.- Sabiendo que la transformada bilineal de Gf(z) es:

$$Gf(w) = \frac{1}{4} \frac{(1 - \frac{T}{2} w)}{(1 + \frac{T}{2} w)} \frac{(3.68842 + 4 \frac{T}{2} w)}{(1 + \frac{T}{2} w)}$$

Calcular de nuevo el desfase obtenido en la señal de salida para las mismas frecuencias de los casos anteriores. Comparar los resultados obtenidos, ¿qué conclusión puede obtenerse del ejercicio? Razonar la respuesta.

Solución

1.- Observando el esquema circuital de la figura 2 puede obtenerse fácilmente la siguiente relación entrada-salida:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{(1-e^{-Ts})}{s}\cdot\left[1+e^{-\frac{T}{4}s}+e^{-\frac{T}{2}s}+e^{-\frac{3T}{4}s}\right]$$

Aplicando transformada Z:

$$Go(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{1}{4}\cdot(1-z^{-1})\cdot Z\left[\frac{1+e^{-\frac{T}{4}s}+e^{-\frac{T}{2}s}+e^{-\frac{3T}{4}s}}{s}\right]$$

El cálculo de la transformada Z modificada se reduce a:

$$Z\left[\frac{e^{-\frac{T}{4}s}}{s}\right] = Zm\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{1}{z-1} \qquad \text{con } m=1-\Delta=3/4$$

Análogamente ocurre en el resto de los casos.

En conclusión, se obtiene como resultado:

$$Go(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{1}{4}\cdot(1-z^{-1})\cdot\left[\frac{z}{z-1}+\frac{3}{z-1}\right] \qquad Go(z) = \frac{z+3}{4\cdot z}$$

2.- Respuesta muestreada del *D/A Linear-Interpolator hold circuit* sin *Oversampling*:

Conocemos: $G(s) = \frac{\left(1-e^{-Ts}\right)^2}{T\cdot s^2}$

Aplicando transformada Z:

$$G(z) = \frac{\left(1-z^{-1}\right)^2}{T}\cdot Z\left[\frac{1}{s^2}\right] = \frac{\left(1-z^{-1}\right)^2}{T}\cdot\frac{T\cdot z}{(z-1)^2} = \frac{1}{z}$$

Aplicando transformada bilineal:

$$G(w) = \frac{1-\frac{T}{2}\cdot w}{1+\frac{T}{2}\cdot w} \qquad G(j\omega w) = \frac{1-j\frac{T}{2}\cdot\omega w}{1+j\frac{T}{2}\cdot\omega w}$$

- Número de muestras por ciclo:

  - $\omega = \frac{2\cdot\pi}{8\cdot T}$ $\Rightarrow$ 8 muestras por ciclo
  - $\omega = \frac{2\cdot\pi}{16\cdot T}$ $\Rightarrow$ 16 muestras por ciclo

El número de muestras es mayor o igual a 8, lo cual nos permite calcular el módulo y la fase de la respuesta frecuencial discreta del sistema mediante la transformada bilineal tomando $\omega_w=\omega$.

Respuesta del sistema: $c(kT) = A\cdot|G(j\omega w)|\cdot\sin(\omega kT + \langle G(j\omega w))$

donde: $\langle G(j\omega w) = -2\cdot \text{arctg}(\omega w\cdot\frac{T}{2})$

- Desfase entre la senoide de entrada y la senoide de salida:

  - $\omega = \frac{2\cdot\pi}{8\cdot T}$ $\Rightarrow$ $\langle G(j\omega w) = -2\cdot\text{arctg}(\frac{2\cdot\pi}{8\cdot T}\cdot\frac{T}{2}) = -2\cdot\text{arctg}(\frac{\pi}{8}) = -42.88^o$
  - $\omega = \frac{2\cdot\pi}{16\cdot T}$ $\Rightarrow$ $\langle G(j\omega w) = -2\cdot\text{arctg}(\frac{2\cdot\pi}{16\cdot T}\cdot\frac{T}{2}) = -2\cdot\text{arctg}(\frac{\pi}{16}) = -22.22^o$

Respuesta muestreada del *D/A Linear-Interpolator hold circuit* con *Oversampling*:

Análogamente al caso anterior: $Go(z) = \frac{z+3}{4\cdot z}$

Aplicando transformada bilineal:

$$Go(w) = \frac{4 - T\cdot w}{4\cdot\left(1+\frac{T}{2}\cdot w\right)} = \frac{1-\frac{T}{4}\cdot w}{1+\frac{T}{2}\cdot w} \qquad Go(j\omega w) = \frac{1-j\frac{T}{4}\cdot\omega w}{1+j\frac{T}{2}\cdot\omega w}$$

- Número de muestras por ciclo:

  - $\omega = \frac{2\cdot\pi}{8\cdot T}$ $\Rightarrow$ 8 muestras por ciclo
  - $\omega = \frac{2\cdot\pi}{16\cdot T}$ $\Rightarrow$ 16 muestras por ciclo

Respuesta del sistema: $c(kT) = A\cdot|Go(j\omega w)|\cdot\sin(\omega kT + \langle Go(j\omega w))$

donde: $\langle G_o(j\omega_w) = -\mathrm{arctg}(\omega_w \cdot \frac{T}{2}) - \mathrm{arctg}(\omega_w \cdot \frac{T}{4})$

- Desfase entre la senoide de entrada y la senoide de salida:

  - $\omega = \frac{2\cdot\pi}{8\cdot T} \quad \Rightarrow \quad \langle G_o(j\omega_w) = -\mathrm{arctg}(\frac{\pi}{8}) - \mathrm{arctg}(\frac{\pi}{16}) = -32.54^o$

  - $\omega = \frac{2\cdot\pi}{16\cdot T} \quad \Rightarrow \quad \langle G_o(j\omega_w) = -\mathrm{arctg}(\frac{\pi}{16}) - \mathrm{arctg}(\frac{\pi}{32}) = -16.71^o$

Conclusión:

Conforme aumenta el número de muestras por ciclo, la aproximación mejora. De hecho, la aproximación es válida a partir del número de muestras necesarias para reproducir con fidelidad la señal de entrada al conversor digital-analógico.

3.1.- Cálculo de $G_f(z)$:

Análogamente al apartado 1, la expresión de la transformada Z de la relación entrada-salida es:

$$G_f(z) = \frac{1}{4}\cdot(1 - z^{-1})\cdot Z\left[\frac{1 + e^{-\frac{T}{4}s} + e^{-\frac{T}{2}s} + e^{-\frac{3T}{4}s}}{s\cdot(1+\tau\cdot s)}\right]$$

$$Z\left[\frac{1}{s\cdot(1+\tau\cdot s)}\right] = \frac{z\cdot\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}{(z-1)\cdot\left(z - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}$$

$$Z\left[\frac{e^{-\frac{T}{4}\cdot s}}{s\cdot(1+\tau\cdot s)}\right] = Zm\left[\frac{1}{s\cdot(1+\tau\cdot s)}\right] = \frac{1}{z-1} - \frac{e^{-m\cdot\frac{T}{\tau}}}{z - e^{-\frac{T}{\tau}}} = \frac{\left(1 - e^{-m\cdot\frac{T}{\tau}}\right)\cdot z + e^{-m\cdot\frac{T}{\tau}} - e^{-\frac{T}{\tau}}}{(z-1)\cdot\left(z - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}$$

donde $m = 1 - \Delta = 3/4$

Realizando cálculos análogos para los restantes casos y considerando $\tau = T/8$ se obtiene:

$G_f(z)$

3.2.- Desfase obt

Conociendo la tr

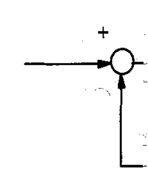
- $\omega = \frac{2}{8}$
- $\omega = \frac{}{1}$

En conclusión, e

Problema 3

Las funciones d
conjugados muy
amortiguamiento
Esta característic

Dado el sistema
sobre la dinámic



a) Suponiendo u

1- El lu

2- Áng

3- Punt

$$G_f(z) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z \cdot \left(z - e^{-8}\right)} \cdot \left[\left(4 - e^{-8} - e^{-4} - e^{-2} - e^{-6}\right) \cdot z + e^{-2} + e^{-4} + e^{-6} - 3 \cdot e^{-8}\right]$$

$$G_f(z) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3.84355 \cdot z - 0.155123}{z \cdot (z - 3.3546 \cdot 10^{-4})}$$

3.2.- Desfase obtenido en esta situación:

Conociendo la transformada bilineal de $G_f(z)$ puede obtenerse el desfase mediante la expresión:

$$\langle G_f(j\omega w) = -3 \cdot \text{arctg}(\omega w \cdot \frac{T}{2}) + \text{arctg}(\omega w \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{4}{3.68842})$$

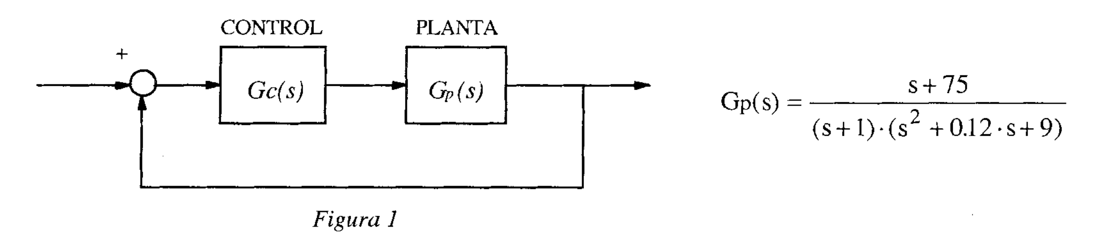
- $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{8 \cdot T} \quad \Rightarrow \quad \langle G_f(j\omega w) = -3 \cdot \text{arctg}(\dfrac{\pi}{8}) + \text{arctg}(\dfrac{\pi}{2 \cdot 3.68842}) = -41.25^{\circ}$
- $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{16 \cdot T} \quad \Rightarrow \quad \langle G_f(j\omega w) = -3 \cdot \text{arctg}(\dfrac{\pi}{16}) + \text{arctg}(\dfrac{\pi}{4 \cdot 3.68842}) = -21.3^{\circ}$

En conclusión, el filtro añade el desfase necesario para mejorar la aproximación.

Problema 3

Las funciones de transferencia de muchos procesos contienen uno o más pares de polos complejo-conjugados muy cercanos al eje imaginario del plano S. Estos sistemas presentan una relación de amortiguamiento muy pequeña y, por esta razón, se denominan sistemas con resonancia estructural. Esta característica provoca la utilización de nuevas estructuras controladoras.

Dado el sistema de control de la figura 1, se pretende estudiar el efecto de la resonancia estructural sobre la dinámica resultante. Para ello, resuelva:



$$Gp(s) = \frac{s + 75}{(s + 1) \cdot (s^2 + 0.12 \cdot s + 9)}$$

Figura 1

a) Suponiendo un control proporcional obtener el lugar geométrico de las raíces calculando:

1- El lugar geométrico de las raíces sobre eje real.

2- Ángulos de las asíntotas y el punto de intersección de las mismas con el eje real.

3- Puntos de corte del lugar geométrico de las raíces con el eje imaginario.

4- Ángulos de arranque.

Observando el trazado del lugar geométrico de las raíces razonar el efecto de la resonancia estructural sobre la dinámica del sistema en lazo cerrado.

Para evitar el efecto anterior se añade en cascada a la planta la red electrónica que se muestra en la figura 2 para formar el sistema de control de la figura 3.

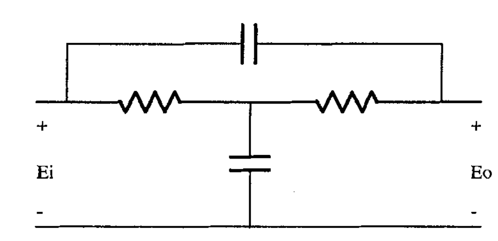


Figura 2

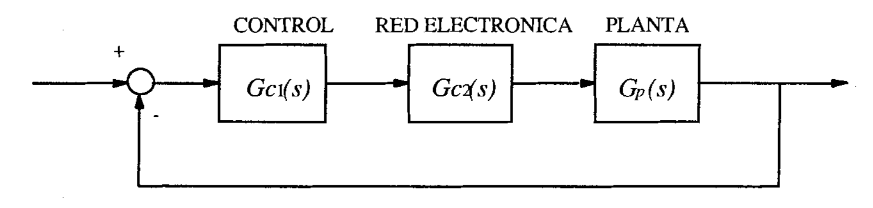


Figura 3

La función de transferencia de la red electrónica es:

$$Gc2(s) = \frac{Eo(s)}{Ei(s)} = \frac{s^2 + 2 \cdot \xi_z \cdot \omega_{nz} \cdot s + \omega_{nz}^2}{s^2 + 2 \cdot \xi_p \cdot \omega_{np} \cdot s + \omega_{np}^2} \qquad \text{donde:} \quad \begin{cases} \omega_{np} = \omega_{nz} \\ \xi_p = \dfrac{1 + 2 \cdot \xi_z^2}{2 \cdot \xi_z} \end{cases}$$

b) Diseñar la red electrónica anterior de manera que cancele la resonancia estructural de la planta.

Suponiendo un control proporcional, obtener el lugar geométrico de las raíces calculando los pasos 1 y 2 del apartado a).

Razonar las ventajas que proporciona la utilización de este tipo de estructura controladora.

c) Diseñar un control proporcional integral derivativo para eliminar el error estacionario de posición y lograr unas especificaciones de respuesta transitoria de tiempo de establecimiento de 4 segundos y máximo sobreimpulso del 20 %.

$$Gc1(s) = k \cdot \frac{(s+a) \cdot (s+b)}{s} \qquad \text{Considérese } b=0.06.$$

Para finalizar el análisis, estudiar el efecto sobre la respuesta frecuencial de la red electrónica diseñada, para ello:

d) Trazar el diagrama de Bode asintótico en módulo y fase de la red electrónica diseñada.

En la figura 4 se muestra el diagrama de Bode en módulo y fase de la planta.

e) Determinar la frecuencia de transición, el margen de fase y el margen de ganancia del sistema sin red electrónica ni control proporcional integral derivativo. ¿Cuál es el efecto cualitativo de la adición de la red electrónica sobre el margen de fase y el margen de ganancia? Razonar la respuesta.

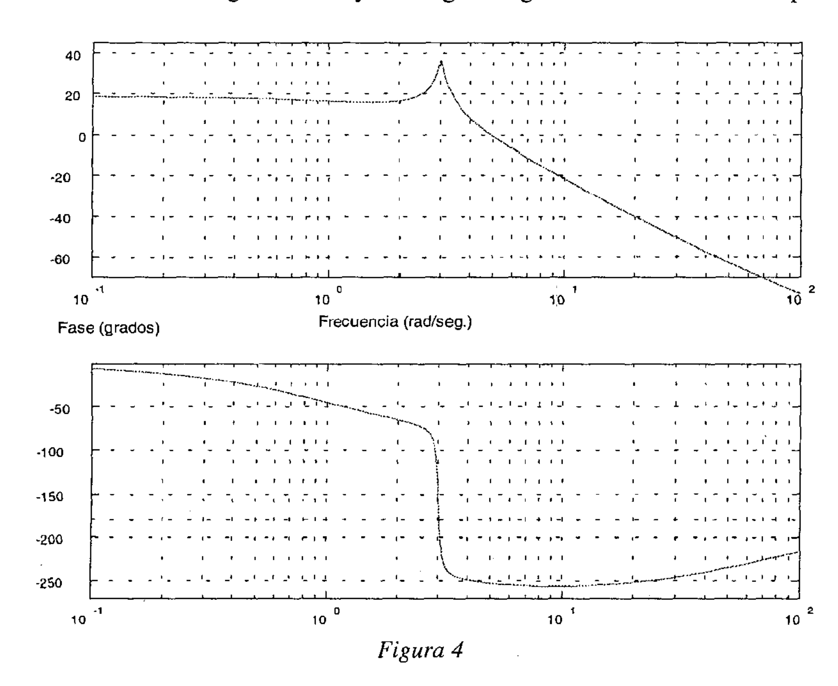


Figura 4

Solución:

a) Lugar geométrico de las raíces:

La función de transferencia en lazo abierto es:

$$G_p(s) = \frac{s+75}{(s+1)\cdot(s^2+0.12\cdot s+9)} \qquad \text{que posee raíces en: } \begin{cases} s_c = -75 \\ s_p = -1 \\ s_{p1,2} = -0.06 \pm j3 \end{cases}$$

Los ángulos de las asíntotas son de $\pm 90^{\circ}$ y el punto de intersección de las mismas con el eje real es:

$$\sigma_a = \frac{-1-2\cdot 0.06+75}{2} = 36.94$$

Debe observarse que este punto se encuentra en semiplano derecho en el plano transformado de Laplace.

La intersección del lugar geométrico de las raíces con el eje imaginario ocurre para el valor de ganancia que proporciona estabilidad límite; de este modo, aplicando el algoritmo de Routh sobre la ecuación característica:

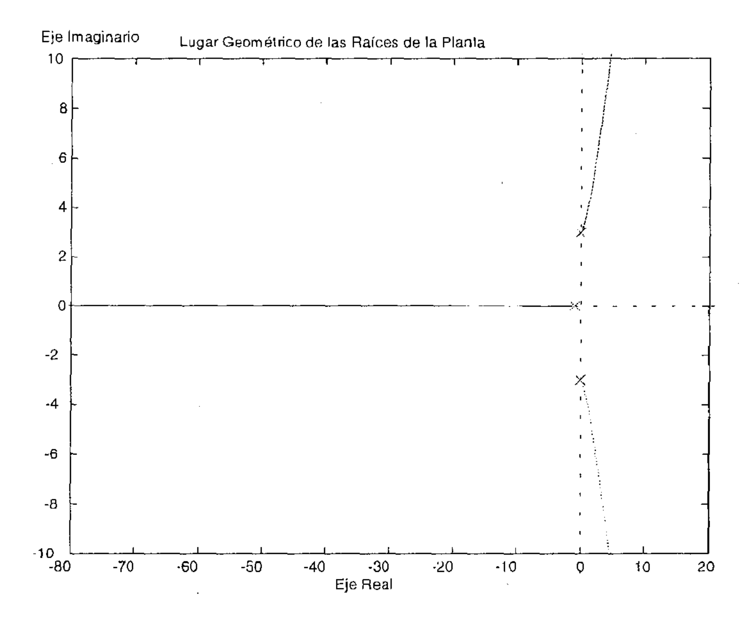
$$(s+1)\cdot(s^2+0.12\cdot s+9)+k\cdot(s+75)=0 \Rightarrow s^3+1.12\cdot s^2+(9.12+k)\cdot s+75\cdot k+9=0$$

$$\left\langle \begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 9.12+k \\ s^2 & 1.12 & 75\cdot k+9 \\ s^1 & \dfrac{-73.88\cdot k+1.2144}{1.12} & \Rightarrow k=0.0164375 \Rightarrow s_{1,2}=\pm j3.022 \\ s^0 & 75\cdot k+9 & \end{array} \right\rangle$$

Los ángulos de arranque son todos conocidos exceptuando los correspondientes a las raíces complejo-conjugadas, para este caso:

$$\text{arct}\,\frac{3}{75-0.06} - \text{arct}\,\frac{3}{1-0.06} - 90^{\circ} - \theta = \pm 180^{\circ} \Rightarrow \theta = 19.7^{\circ}$$

En la siguiente figura se muestra el lugar geométrico resultante.



A partir del lugar geométrico puede afirmarse que, debido a la proximidad de las raíces complejo-conjugadas al eje imaginario, el sistema en lazo cerrado entra en la inestabilidad para valores de k muy pequeños; el diseño de estructuras de control partiendo de este tipo de plantas conlleva la cancelación de estas raíces complejo-conjugadas previas al diseño de la estructura controladora.

b) Para cancelar la resonancia estructural, deben igualarse los ceros de la red electrónica con los polos complejo-conjugados de la planta; a su vez, los polos de la red electrónica aparecerán como resultado de la aplicación de las expresiones que ofrece la propia red.

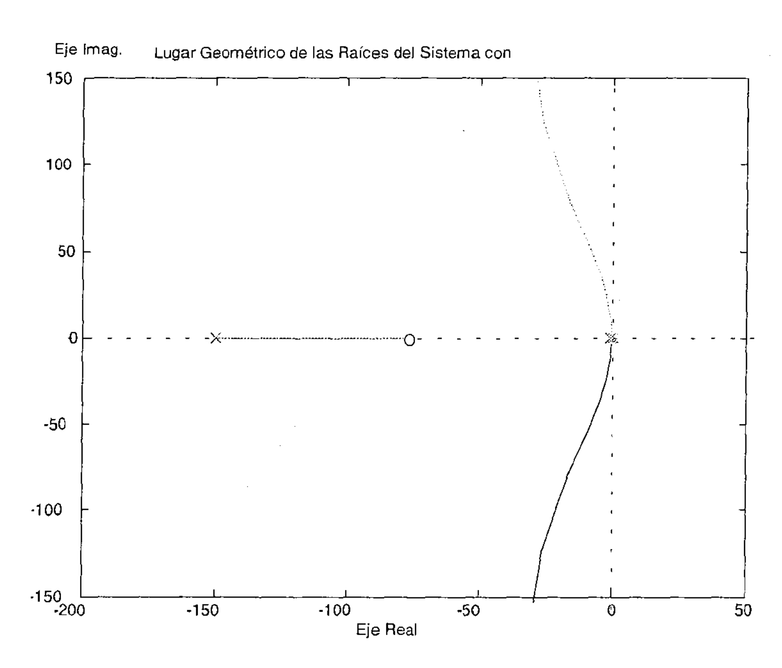
$$Gc2(s) = \frac{Eo(s)}{Ei(s)} = \frac{s^2 + 0.12 \cdot s + 9}{s^2 + 2 \cdot \xi_p \cdot \omega_{np} \cdot s + \omega_{np}^2} \qquad \text{donde: } \begin{cases} \omega_{np} = \omega_{nz} = 3 \\ \xi_p = \dfrac{1 + 2 \cdot \xi_z^2}{2 \cdot \xi_z} = \dfrac{1 + 2 \cdot 0.02^2}{2 \cdot 0.02} = 25.02 \end{cases}$$

$$Gc2(s) = \frac{s^2 + 0.12 \cdot s + 9}{s^2 + 150.12 \cdot s + 9} = \frac{s^2 + 0.12 \cdot s + 9}{(s + 0.06) \cdot (s + 150.06)}$$

de este modo la función de transferencia en lazo abierto final resulta:

$$G_T(s) = G_p(s) \cdot Gc2(s) = \frac{s + 75}{(s + 0.06) \cdot (s + 1) \cdot (s + 150.06)}$$

Para trazar el nuevo lugar geométrico de las raíces es necesario determinar el lugar geométrico sobre el eje real y las asíntotas:



Los ángulos de las asíntotas son de $\pm 90^{\circ}$ y el punto de intersección de las mismas con el eje real es:

$$\sigma_a = \frac{-1-0.06-150.06+75}{2} = -38.06$$

Debe observarse que este punto se encuentra en semiplano izquierdo en el plano transformado de Laplace. Dado que el sistema debe tener un punto de ruptura ubicado entre las raíces s=-0.06 y s=-1, según las características obtenidas de la asíntotas, puede afirmarse que el sistema en lazo cerrado es siempre estable (rigurosamente, es necesario determinar la no existencia de puntos de intersección del lugar geométrico de las raíces con el eje imaginario, pero dado que el punto de intersección de las raíces con el eje real se encuentra muy alejado del punto de ruptura, puede suponerse que esta condición se verifica).

c) Diseño del control proporcional integral derivativo.

$$G_{c1}(s) = k\cdot\frac{(s+a)\cdot(s+b)}{s} \qquad b=0.06.$$

Según las especificaciones de diseño:

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 4\ \text{seg} \Rightarrow \sigma = 1 \qquad\qquad M_p = e^{-\pi\sigma/\omega_d} = 0.2 \Rightarrow \omega_d = 1.952$$

La función de transferencia en lazo abierto resulta:

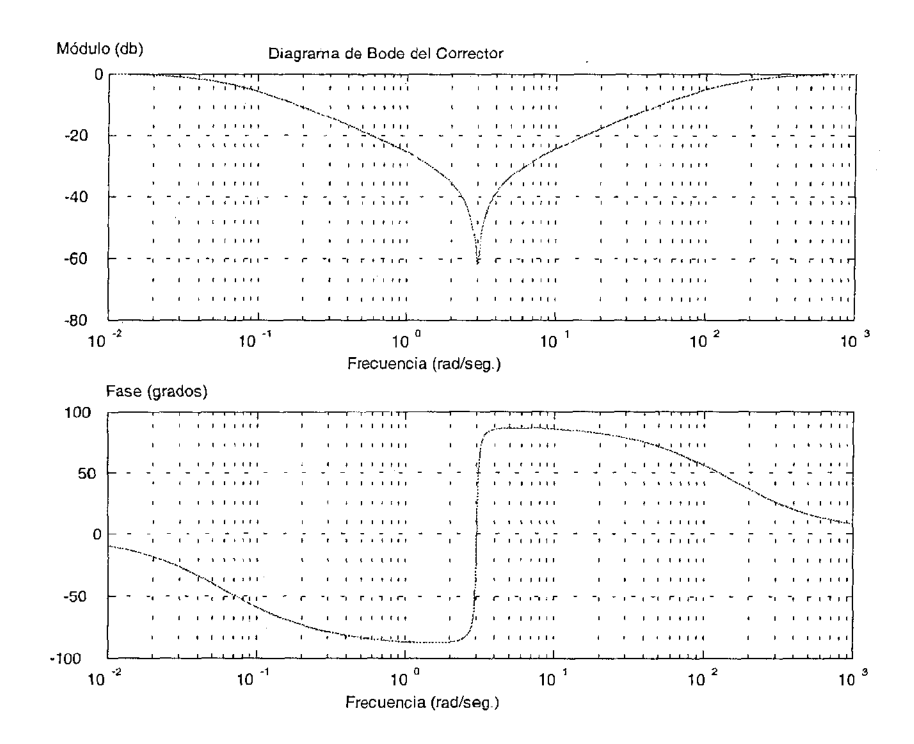
$$G_T(s) = G_p(s)\cdot G_{c2}(s)\cdot G_{c1}(s) = \frac{k\cdot(s+a)\cdot(s+75)}{s\cdot(s+1)\cdot(s+150.06)}$$

Efectuando el diseño en el plano transformado de Laplace mediante la imposición de las condiciones de ángulo y módulo sobre los puntos deseados se obtiene:

$$\operatorname{arctg}\left[\frac{1.952}{a-1}\right] + \operatorname{arctg}\left[\frac{1.952}{75-1}\right] - \operatorname{arctg}\left[\frac{1.952}{150.06-1}\right] - 90^o - 180^o + \operatorname{arctg}\left[\frac{1.952}{1}\right] = \pm 180^o; \quad a=4.938$$

$$\frac{k\cdot\sqrt{(4.938-1)^2+1.952^2}\cdot\sqrt{(75-1)^2+1.952^2}}{1.952\cdot\sqrt{1+1.952^2}\cdot\sqrt{(150.06-1)^2+1.952^2}} = 1 \Rightarrow k = 1.9615$$

Control PID diseñado: $$G_{c1}(s) = 1.9615\cdot\frac{(s+0.06)\cdot(s+4.938)}{s}$$



d) La figura anterior muestra el diagrama de Bode en módulo y fase de la red electrónica diseñada para cancelar la resonancia estructural de la planta (debe observarse que se han trazado diagramas asintóticos y reales).

e) Observando el diagrama de Bode en módulo y fase de la planta, pueden determinarse gráficamente los valores del margen de fase y el margen de ganancia del sistema sin la red electrónica ni el control diseñado, obteniendo:

- Frecuencia de transición: $\omega t = 5$ rad / seg

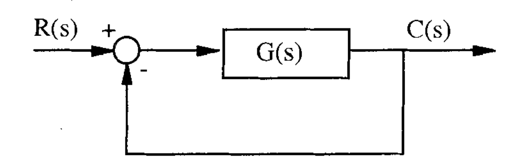
- Margen de fase: $MF = 180^{\circ} - 250^{\circ} = -70^{\circ}$

- Margen de ganancia: $MG = -35$ dB determinados en $\omega i = 3$ rad / seg

Debe observarse el efecto desestabilizador de la resonancia estructural que provoca una disminución de más de 120° en fase y un aumento de 30 dB en el módulo de la respuesta frecuencial en lazo abierto. La red electrónica añadida al sistema compensa este efecto desestabilizador añadiendo fase y reduciendo módulo en la frecuencia de resonancia; de este modo, aumenta el margen de fase y el margen de ganancia total.

Problema 4

Los sistemas de fase mínima son aquellos que poseen algún polo o cero de su función de transferencia en el semiplano derecho del plano S. Suponer el siguiente sistema en lazo cerrado:



donde: $G(s) = \dfrac{(s+a)}{s \cdot (s+b)}$

Se pretende estudiar la estabilidad del sistema en lazo cerrado según la ubicación de sus singularidades. Analizar los siguientes casos:

1. a = -1; b = 1
2. a = 1; b = 1
3. a = 1; b = -1

Para ello, realizar los siguientes apartados en cada uno de los casos:

a) Obtener la respuesta frecuencial del sistema y descomponerla en la forma: $G(j\omega) = \mathrm{Re}[G(j\omega)] + j\,\mathrm{Im}[G(j\omega)]$

b) Calcular la siguiente tabla:

ω	$\mathrm{Re}[G(j\omega)]$	$\mathrm{Im}[G(j\omega)]$
0		
0.1		
1		
10		
∞		

c) Dibujar el diagrama polar utilizando los valores calculados anteriormente.

d) Dibujar el diagrama de Nyquist ($-\infty<\omega<\infty$).

e) Calcular el margen de fase y el margen de ganancia.

f) Determinar la estabilidad del sistema en lazo cerrado aplicando el criterio de Nyquist.

g) Comparando
criterio de Nyqu

h) ¿Como varía
aumenta? ¿Q

Nota: Utiliza

Solución :

* Caso 1: G(s) =

a) Respuesta frec

G(jω) = (jω– / jω·(jω

b) Tabla:

c) Diagrama polar

g) Comparando los resultados de margen de fase y margen de ganancia con el resultado de aplicar el criterio de Nyquist, ¿qué conclusión obtiene de esta comparación? Razonar la respuesta.

h) ¿Como varía la estabilidad en lazo cerrado si la ganancia en continua del sistema en lazo abierto aumenta? ¿Qué conclusión obtiene de este apartado? Razonar la respuesta.

Nota: Utilizar el lugar geométrico de las raíces (de forma aproximada) si lo considera necesario.

Solución :

* Caso 1: $G(s) = \dfrac{(s-1)}{s\cdot(s+1)}$

a) Respuesta frecuencial:

$$G(j\omega) = \frac{(j\omega-1)}{j\omega\cdot(j\omega+1)} = \frac{2\omega + j\left(1-\omega^2\right)}{\omega\left(1+\omega^2\right)};\quad G(j\omega) = \mathrm{Re}[G(j\omega)] + j\,\mathrm{Im}[G(j\omega)];\quad \begin{cases} \mathrm{Re}[G(j\omega)] = \dfrac{2}{\left(1+\omega^2\right)} \\ \mathrm{Im}[G(j\omega)] = \dfrac{\left(1-\omega^2\right)}{\omega\left(1+\omega^2\right)} \end{cases}$$

b) Tabla:

ω	$\mathrm{Re}[G(j\omega)]$	$\mathrm{Im}[G(j\omega)]$
0	2	∞
0.1	1.98	0.9
1	1	0
10	0.0198	-0.098
∞	0	0

c) Diagrama polar:

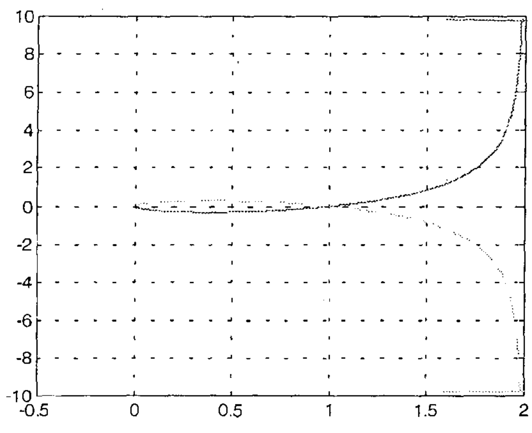


Diagrama polar Caso 1 (línea continua) y simétrico (línea discontinua)

d) Diagrama de Nyquist:

Para trazar el diagrama de Nyquist únicamente debemos trazar el simétrico del diagrama polar respecto al eje real, así como trazar el recorrido de radio infinito correspondiente a la transformación del recorrido de Nyquist alrededor del polo en origen del plano S. Este recorrido de radio infinito se recorre en sentido horario porque el polo en origen es rodeado en sentido antihorario por el recorrido de Nyquist.

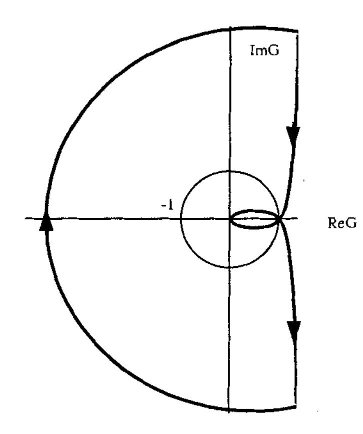


Diagrama de Nyquist Caso 1.

e) Obtención del margen de fase y el margen de ganancia:

Para calcular el margen de fase únicamente debemos encontrar la intersección entre el diagrama polar y el circulo de radio unidad. Esta intersección ocurre para ω_t=1rad/seg en el punto 1, resultando de este modo un valor de MF=±180°.

El margen de ganancia se obtiene buscando la frecuencia para la cual la respuesta frecuencia en lazo abierto presenta 180°, no produciéndose esta situación para ningún valor de frecuencia (exceptuando para $\omega=\infty$), obteniendo MG=0.

f) Aplicación del criterio de Nyquist:

En el diagrama de Nyquist se observa un rodeo en sentido horario al punto -1+j0, lo que implica N=1. El sistema en lazo abierto no posee ningún polo en semiplano derecho, P=0 (porque el polo en origen no se encuentra en el interior del recorrido de Nyquist). De este modo: Z=N+P=1. El sistema en lazo cerrado posee un polo en semiplano derecho, siendo, de este modo, inestable.

g) Comparando los resultados anteriores comprobamos que en sistemas de fase no mínima no es posible aplicar los conceptos de margen de fase y margen de ganancia para cuantificar la estabilidad relativa porque son contradictorios con el resultado del criterio de Nyquist. Fijémonos que, aparentemente, el sistema en lazo cerrado es estable observando los valores de margen de fase y margen de ganancia, cuando realmente es inestable, como sabemos a partir del criterio de estabilidad absoluta.

h) Variación de la estabilidad en función de la ganancia en continua:

Si la ganancia en continua aumenta el sistema permanece siendo inestable debido a que, observando el LGR, aparece una rama en semiplano derecho que es originaria de la inestabilidad del sistema en lazo cerrado.

* Caso 2: $G(s) = \dfrac{(s+1)}{s \cdot (s+1)} = \dfrac{1}{s}$

a) Respuesta frecuencial:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega}; \quad G(j\omega) = \mathrm{Re}[G(j\omega)] + j\mathrm{Im}[G(j\omega)]; \quad \begin{cases} \mathrm{Re}[G(j\omega)] = 0 \\ \mathrm{Im}[G(j\omega)] = -\dfrac{1}{\omega} \end{cases}$$

b) Tabla:

ω	$\mathrm{Re}[G(j\omega)]$	$\mathrm{Im}[G(j\omega)]$
0	0	-∞
0.1	0	-10
1	0	-1
10	0	-0.1
∞	0	-0

c) Diagrama polar:

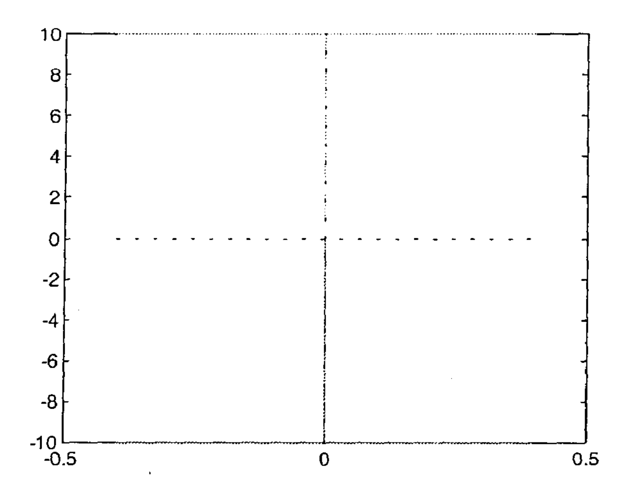


Diagrama polar Caso 2 (línea continua) y simétrico (línea discontinua)

d) Diagrama de Nyquist:

Para trazar el diagrama de Nyquist únicamente debemos trazar el simétrico del diagrama polar respecto al eje real, así como trazar el recorrido de radio infinito correspondiente a la transformación del recorrido de Nyquist alrededor del polo en origen del plano S.

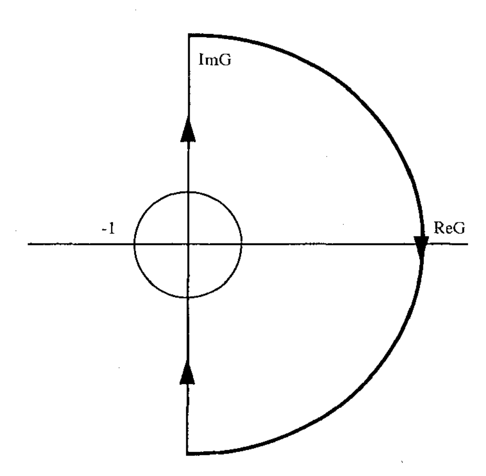


Diagrama de Nyquist Caso 2.

e) Obtención del margen de fase y el margen de ganancia:

La intersección entre el diagrama polar y el circulo de radio unidad ocurre para ω_t=1rad/seg en el punto -j, resultando de este modo un valor de MF=90°. Análogamente al caso anterior se obtiene MG=∞.

f) Aplicación del criterio de Nyquist:

En el diagrama de Nyquist se observa que no se produce ningún rodeo al punto -1+j0, lo que implica N=0. El sistema en lazo abierto no posee ningún polo en semiplano derecho, P=0. De este modo: Z=N+P=0. El sistema en lazo cerrado es estable.

g) Comparando los resultados anteriores comprobamos que en sistemas de fase mínima sí es posible aplicar los conceptos de margen de fase y margen de ganancia para cuantificar la estabilidad relativa porque coinciden con el resultado del criterio de Nyquist.

h) Variación de la estabilidad en función de la ganancia en continua:

Si la ganancia en continua aumenta, el sistema permanece estable proporcionando una constante de tiempo más pequeña.

* Caso 3: $G(s) = \frac{(s+1)}{s \cdot (s-1)}$

a) Respuesta frecuencial:

$$G(j\omega) = \frac{(j\omega + 1)}{j\omega \cdot (j\omega - 1)} = \frac{-2\omega + j\left(1-\omega^2\right)}{\omega\left(1+\omega^2\right)}; \; G(j\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] + j\,\text{Im}[G(j\omega)];$$

$$\begin{cases} \text{Re}[G(j\omega)] = \dfrac{-2}{\left(1+\omega^2\right)} \\ \text{Im}[G(j\omega)] = \dfrac{\left(1-\omega^2\right)}{\omega\left(1+\omega^2\right)} \end{cases}$$

b) Tabla:

ω	$\text{Re}[G(j\omega)]$	$\text{Im}[G(j\omega)]$
0	-2	∞
0.1	-1.98	0.9
1	-1	0
10	-0.0198	-0.098
∞	-0	0

c) Diagrama polar:

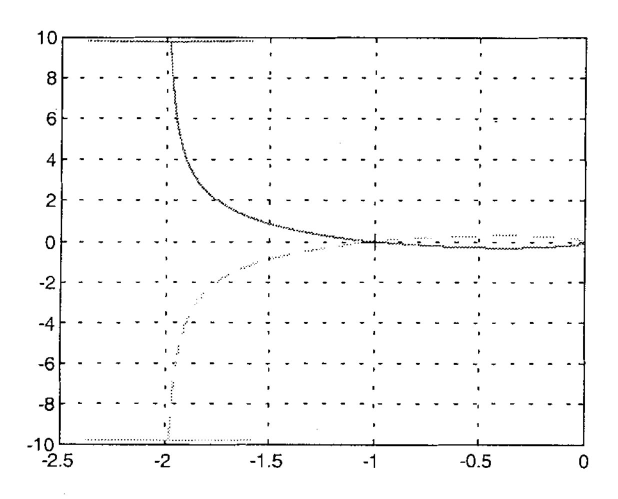


Diagrama polar Caso 3 (línea continua) y simétrico (línea discontinua)

d) Diagrama de Nyquist:

Trazando el simétrico del diagrama polar respecto al eje real, así como el recorrido de radio infinito correspondiente a la transformación del contorno del recorrido de Nyquist alrededor del polo en origen del plano S, se obtiene el diagrama de Nyquist.

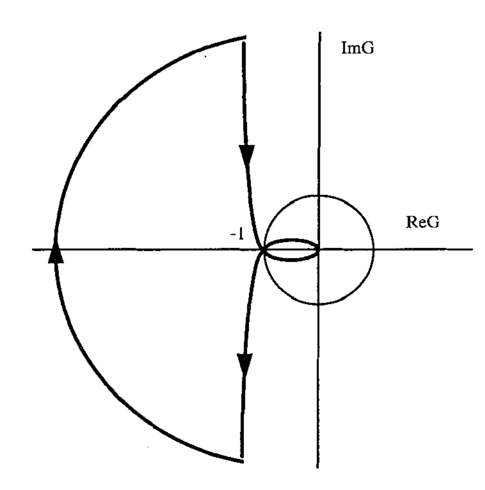


Diagrama de Nyquist Caso 3.

e) Obtención del margen de fase y el margen de ganancia:

Para calcular el margen de fase únicamente debemos encontrar la intersección entre el diagrama polar y el circulo de radio unidad. Esta intersección ocurre para ω_t=1rad/seg en el punto -1, resultando de este modo un valor de MF=0°.

El margen de ganancia se obtiene buscando la frecuencia para la cual la respuesta frecuencia en lazo abierto presenta 180°, produciéndose esta situación para ω_o=1rad/seg obteniendo MG=0.

f) Aplicación del criterio de Nyquist:

El diagrama de Nyquist cruza por el punto -1+j0; de este modo el sistema el lazo cerrado presenta polos en el eje imaginario del plano S, por lo que es, de este modo, oscilatorio.

g) Comparando los resultados anteriores, comprobamos un resultado conocido: los sistemas oscilatorios en lazo cerrado presentan un margen de fase de cero grados y un margen de ganancia de cero dB's.

h) Variación de la estabilidad en función de la ganancia en continua:

Si la ganancia en continua aumenta, el sistema pasa de la inestabilidad (para k<1) a la estabilidad (para k>1), comportamiento totalmente opuesto al de un sistema de fase mínima.

Problema 5

El *"Simple-Hold I*
común en la prá
transferencia es:

Sin embargo, en d
Interpolator hold c

Señal
Discreta

a) Demostrar que
Interpolator hold c

Se pretende comp
analógico (D/A). F

b) Calcular la exp
(rad/seg) en la ent

Problema 5

El *"Simple-Hold D/A Converter"* es el convertidor digital-analógico más sencillo (también el más común en la práctica) y se caracteriza como un mantenedor de orden cero cuya función de transferencia es:

$$Goh(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

Sin embargo, en determinadas aplicaciones se utiliza el convertidor digital-analógico *"D/A Linear-Interpolator hold circuit"*, cuyo esquema circuital se presenta en la figura 1.

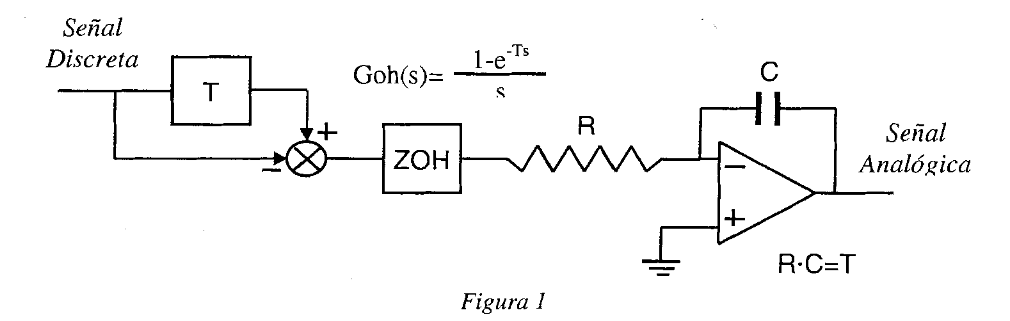


Figura 1

a) Demostrar que la función de transferencia del convertidor digital-analógico *"D/A Linear-Interpolator hold circuit"* es:

$$G(s) = \frac{\left(1-e^{-Ts}\right)^2}{T \cdot s^2}$$

Se pretende comparar los efectos en el dominio frecuencial de estos dos tipo de convertidores digital-analógico (D/A). Para este estudio se propone el sistema:

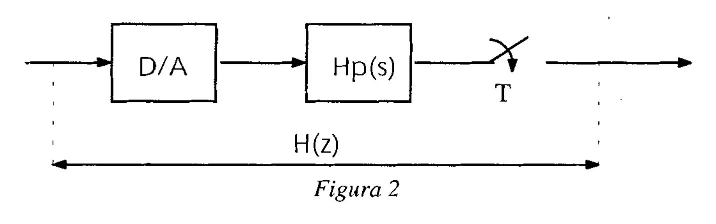


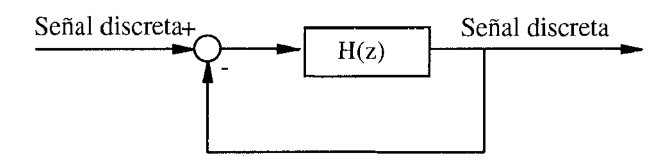
Figura 2

$$Hp(s) = \frac{\omega c}{s}\text{; cumpliéndose: } T < \frac{2}{\omega c}$$

b) Calcular la expresión de la atenuación que sufre una señal ruidosa senoidal de frecuencia ω=10/T (rad/seg) en la entrada del convertidor, en función de ωc y T, para los dos tipos de convertidores D/A.

Nota: Suponer que la frecuencia de la señal de ruido en el plano transformado W es aproximadamente igual a la frecuencia real.

Considérese el sistema en lazo cerrado siguiente:



c) Obtener la relación que debe existir entre ωc y T para tener un margen de ganancia igual a 14 dB en los dos tipos de convertidores D/A. Calcular el margen de fase que se obtiene en estas situaciones.

d) Indicar las ventajas y desventajas de los dos tipos de convertidores estudiados. Razonar la respuesta.

Solución:

a) Para demostrar la función de transferencia del *"D/A Lineal-Interpolator hold circuit"* , únicamente debemos resolver la función de transferencia circuital propuesto :

$$\frac{V_0(s)}{V_1(s)} = -\frac{1}{RCs} = -\frac{1}{Ts}$$

Conociendo que un retardo de una muestra equivale a una función transformada e^{-Ts}, tenemos, en conclusión, la función de transferencia final:

$$G(s) = \frac{\left(1-e^{-Ts}\right)^2}{Ts^2}$$

b) Debemos calcular la expresión de la atenuación que sufre una señal ruidosa senoidal de frecuencia $\omega = 10/T$ (rad/seg) en la entrada del convertidor, en función de ω_c y T. Para ello recordemos que la atenuación de una señal senoidal en un sistema lineal e invariante en el tiempo coincide con la inversa del módulo de la respuesta frecuencial del sistema (en unidades lineales) a la frecuencia de la señal senoidal.

De este modo, previamente, se deberán calcular la transformada Z y la transformada bilineal, pues se trata de un sistema discreto.

* Para *"D/A Linear-Interpolator hold circuit"*:

$$H(s) = G(s)\cdot Hp(s) = \frac{\omega c}{s}\frac{\left(1-e^{-Ts}\right)^2}{Ts^2}; \quad H(z) = \frac{\omega c}{T}(1-z^{-1})^2 Z\left[\frac{1}{s^3}\right] = \frac{\omega c}{T}(1-z^{-1})^2\,\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

$$H(z) = \frac{\omega c}{T}\frac{T^2}{2}\frac{(z+1)}{z(z-1)} = \frac{\omega c}{2}T\frac{(z+1)}{z(z-1)}$$

Transformada bilineal:

$$H(w) = \frac{\omega c}{2}T\frac{\left[\dfrac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}+1\right]}{\left[\dfrac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}\right]\cdot\left[\dfrac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}-1\right]} = \frac{\omega c}{2}T\frac{2\left[1-\frac{T}{2}w\right]}{Tw\left[1+\frac{T}{2}w\right]}; \quad H(w) = \omega c\frac{\left(1-\frac{T}{2}w\right)}{w\cdot\left(1+\frac{T}{2}w\right)}$$

Nos indican que la frecuencia de la señal de ruido transformada al plano W es aproximadamente igual a la frecuencia real; ello conlleva que, para poder conocer la atenuación sufrida por esta señal, únicamente debemos trazar el diagrama de Bode en el plano transformado y mirar el valor de la ganancia en la frecuencia: $\omega w = 10/T$.

$$H(j\omega w) = \omega c\cdot\frac{\left(1-j\frac{T}{2}\omega w\right)}{j\omega w\cdot\left(1+j\frac{T}{2}\omega w\right)}$$

El diagrama de Bode es en este caso muy sencillo, pues las contribuciones de cero y polo reales de frecuencia de corte $2/T$ se cancelan entre sí en módulo; el resultado es únicamente una recta de pendiente -20dB/dec que pasa por el punto $20\log\omega c$ para la frecuencia $\omega w = 1$. En conclusión, la atenuación resultante es:

$$\left|H(j\omega w)\right|_{\substack{dB\\ \omega w=10/T}} = 20\cdot\log\frac{10}{\omega c\cdot T}$$

* Para *"Simple-hold D/A converter"*:

$$H(s) = Goh(s)\cdot Hp(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{\omega c}{s}; \quad H(z) = (1-z^{-1})\cdot\omega c\cdot Z\left[\frac{1}{s^2}\right] = \frac{z-1}{z}\cdot\omega c\cdot\frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{T\cdot\omega c}{z-1}$$

Transformada bilineal:

$$H(w) = T\cdot\omega c\cdot\frac{1}{\dfrac{1+\dfrac{T}{2}w}{1-\dfrac{T}{2}w}-1} = T\cdot\omega c\cdot\frac{1-\dfrac{T}{2}w}{1+\dfrac{T}{2}w-1+\dfrac{T}{2}w};\qquad H(w) = T\cdot\omega c\cdot\frac{1-\dfrac{T}{2}w}{T\cdot w} = \omega c\cdot\frac{1-\dfrac{T}{2}w}{w}$$

Análogamente al caso anterior :

$$H(j\omega w) = \omega c\cdot\frac{1-j\dfrac{T}{2}\omega w}{j\omega w}$$

En este caso, debemos observar que el valor del módulo en la frecuencia 10/T es igual al valor del módulo en la frecuencia 2/T (asintóticamente), dado que la pendiente a partir de la frecuencia 2/T es de 0dB/dec. De este modo la atenuación resulta ser:

$$\left|H(j\omega w)\right|_{\substack{dB\\ \omega w=10/T}} = 20\cdot\log\frac{2}{\omega c\cdot T}$$

c) Obtención de la relación que debe existir entre ω_c y T para tener un margen de ganancia igual a 14 dB.

Para resolver este apartado deben observarse, de nuevo, los diagramas de Bode para cada uno de los convertidores D/A.

* Para *"D/A Linear-Interpolator hold circuit"*:

El margen de ganancia se obtiene en la frecuencia de paso por una fase de -180°, en este caso esto ocurre para la frecuencia:

$$FASE\left[H(j\omega w0\right] = -90^\circ - 2\ \text{arctg}\ \frac{T}{2}\omega w0 = -180^\circ \Rightarrow \omega w0 = \frac{2}{T}$$

$$MG = 20\ \log\ \frac{\omega w0}{\omega c} = 20\ \log\ \frac{2}{T\cdot\omega c} = 14\ dB \Rightarrow T\cdot\omega c = 0.4$$

El margen de fase obtenido en este caso es:

$$MF = 180^\circ - 90^\circ - 2\ \text{arctg}\ \frac{T}{2}\omega wt = 90^\circ - 2\ \text{arctg}\ \frac{T}{2}\omega wt$$

Donde la frecuencia de transición es: $\omega wt = \omega c$.

$$MF = 90^\circ - 2\ \text{arctg}\ \frac{0.4}{2} = 67.38^\circ$$

* Para *"Simple-hold D/A converter"*:

$$\text{FASE}[H(j\omega_{w0})] = -90^\circ - \text{arctg}\ \frac{T}{2}\omega_{w0} = -180^\circ \Rightarrow \omega_{w0} = \infty$$

$$MG = 20 \log \frac{2}{T \cdot \omega_c} = 14\ \text{dB} \Rightarrow T \cdot \omega_c = 0.4$$

El margen de fase obtenido en este caso es:

$$MF = 180^\circ - 90^\circ - \text{arctg}\ \frac{T}{2}\omega_{wt} = 90^\circ - \text{arctg}\ \frac{T}{2}\omega_{wt}$$

Donde la frecuencia de transición es: $\omega_{wt} = \omega_c$.

$$MF = 90^\circ - \text{arctg}\ \frac{0.4}{2} = 78.69^\circ$$

d) Conclusiones :

El *"Simple-hold D/A converter"* ofrece mayor margen de fase (para igual margen de ganancia), pero ofrece menos rechazo (menor inmunidad) al ruido que el *"D/A Linear-Interpolator hold circuit"*.

5. Diseño de sistemas de control en el dominio frecuencial

5.1 Introducción

El diseño de los parámetros de los controladores que se han desarrollado hasta el momento se ha basado en técnicas temporales, efectuando las especificaciones del diseño a nivel temporal, mediante el máximo sobreimpulso, el tiempo de establecimiento, etc. Estas especificaciones se han trasladado al plano de Laplace, posibilitando el uso de las herramientas y técnicas de diseño disponibles en este plano. No obstante, en el diseño realizado se ha tenido pleno conocimiento de las características de la planta o proceso que se pretende controlar, pues sin este conocimiento el diseñador no tiene ningún indicativo de la forma de llevar a cabo el control adecuado del sistema, lo cual se extiende a aquellos sistemas de los que se desconoce la función de transferencia o en los que ésta es difícil de caracterizar. Para estos sistemas, una alternativa de diseño consiste, en primer lugar, en obtener información de la planta o proceso mediante su respuesta frecuencial, que es posible obtener de una manera experimental. Posteriormente, se puede realizar el diseño del controlador mediante técnicas de diseño basadas en la respuesta frecuencial del sistema que hay que controlar. En este tema se pretende explicar las diferentes técnicas de diseño que utilizan la respuesta frecuencial como base, cuyas características, márgenes de fase y de ganancia, ancho de banda y ganancia en continua, permitirán realizar el diseño de los controles más adecuados para una planta determinada.

Aunque hasta el momento se ha utilizado el término "controlador" para definir al conjunto de acciones que se utilizan para actuar sobre el proceso; el término más empleado en la bibliografía existente es el de "compensador", de manera que es frecuente referirse al control PI como compensador PI, y al control PID como compensador PID, etc.

En este tema se estudiará el diseño de los controladores temporales más habituales (controladores P, PI, PD y PID), desde un punto de vista frecuencial (compensadores P, PI, PD y PID). Se insistirá en la relación existente entre las características frecuenciales de los sistemas y las características de las respuestas temporales obtenidas (tiempo de establecimiento, máximo sobreimpulso y velocidad en la respuesta), y se expondrán nuevos compensadores, fruto de la observación del sistema desde un punto de vista frecuencial, como son el compensador en adelanto y en atraso.

Una ventaja que tiene el diseño mediante la respuesta frecuencial de los sistemas, además de ser útil para aquellos sistemas de difícil caracterización, consiste en que se puede extender a algunos sistemas no lineales, empleando para ello la técnica definida "función descriptiva".

5.2 Compensación serie y compensación paralelo

La compensación de un sistema se puede realizar mediante la compensación serie, figura 5.1a, o mediante la compensación paralelo, figura 5.1b. En la compensación serie se sitúa el compensador D(s) en serie entre la señal de error e(s) y la función de transferencia de la planta G(s), mientras que en la compensación paralelo se sitúa el compensador D(s) en un bucle interno de realimentación.

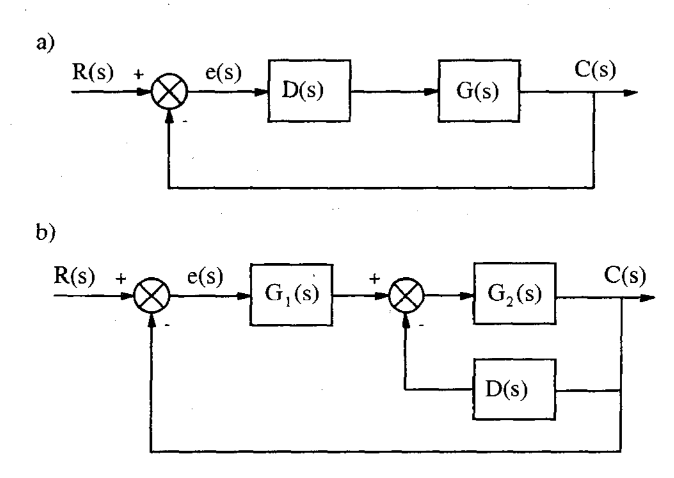


Fig. 5.1 (a) Compensación serie; (b) Compensación paralelo.

En general, la compensación serie es más sencilla que la paralelo, puesto que al llevar a cabo la compensación el módulo y la fase de la respuesta frecuencial del compensador serie D(s) se pueden sumar directamente con el módulo y la fase, respectivas, de la respuesta frecuencial del sistema que hay que compensar G(s), lo que facilita la tarea del diseño. Esto no ocurre así en la compensación en paralelo, puesto que es una compensación más complicada de llevar a cabo.

En la compensación serie, la respuesta frecuencial de la función de transferencia en lazo abierto, considerando el compesador, fig. 5.1a, es en módulo:

$$|G_{LA}(j\omega)|_{db} = |D(j\omega)|_{db} + |G(j\omega)|_{db}$$

Y, en fase:

$$\angle G_{LA}(j\omega) = \angle D(j\omega) + \angle G(j\omega)$$

Por tanto, en el diseño del compensador serie se debe considerar que su respuesta frecuencial en módulo y en fase se suma de forma directa a la respuesta frecuencial del sistema que se debe compensar, lo que determinará, claramente, el efecto del compensador sobre el sistema. Se debe tener en cuenta que todos los compensadores que se exponen en este capítulo están concebidos como compensadores en serie, por lo que deben situarse según la forma indicada en la figura 5.1a.

5.3 Relación respuesta frecuencial - características temporales

Antes de abordar a fondo el diseño de los compensadores, es conveniente tratar de establecer qué relaciones existen entre las características temporales (máximo sobreimpulso, error en régimen estacionario, etc..) y las características frecuenciales de un sistema (márgenes de fase y de ganancia, ancho de banda, etc..). Entender esta relación es vital, puesto que el conocimiento de las características frecuenciales que deben optimizarse en el diseño depende de ello.

5.3.1 Ganancia normalizada en Bode y error en régimen estacionario

A través de la ganancia normalizada del diagrama de Bode de un sistema puede establecerse el error en régimen estacionario que éste va a cometer frente a un determinado tipo de entrada. Este hecho es debido a que el término constante normalizado del módulo de la respuesta frecuencial en lazo abierto corresponde con uno de los coeficientes estáticos de error, que puede ser el coeficiente estático de posición, el de velocidad o el de aceleración.

Como ejemplo, puede tomarse un sistema cualquiera constituido por tres polos, dos ceros y un término constante, con una función de transferencia de lazo abierto:

$$G_1(s) = \frac{10(s+a)(s+b)}{(s+n)(s+m)(s+p)} \tag{5.1}$$

De esta función de transferencia puede deducirse que, puesto que carece de elementos integradores, el sistema tendrá un error en régimen estacionario no nulo frente a una entrada escalón, de valor:

$$e_{ssp} = \frac{1}{1+k_p}$$
$$k_p = \lim_{s\to 0} G_1(s) = \frac{10\cdot a\cdot b}{n\cdot m\cdot p} \tag{5.2}$$

Sin embargo, si se trata de analizar la respuesta frecuencial de éste sistema, previamente se debe efectuar la normalización de su función de transferencia :

$$G_1(j\omega) = G_1(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{10\cdot a\cdot b}{n\cdot m\cdot p}\cdot\frac{\left(\frac{j\omega}{a}+1\right)\left(\frac{j\omega}{b}+1\right)}{\left(\frac{j\omega}{n}+1\right)\left(\frac{j\omega}{m}+1\right)\left(\frac{j\omega}{p}+1\right)} \tag{5.3}$$

En esta normalización se observa como el término constante es igual al coeficiente estático de posición (5.2). En consecuencia, el error en régimen estacionario de posición puede deducirse a partir de este término en la respuesta frecuencial del sistema.

Cuando la función de transferencia tiene un polo s=0, el coeficiente estático de velocidad es el que tiene correspondencia con la ganancia normalizada, ec. (5.4) y (5.6). Si la función de transferencia tiene un par de polos en s=0, ec. (5.5), entonces es el coeficiente estático de aceleración quien

corresponde con la ganancia normalizada, ec. (5.7). Considerando las funciones de transferencia definidas por las ecuaciones (5.1), (5.4) y (5.5), se puede realizar la tabla 5.1, donde se muestran la expresión de sus correspondientes coeficientes estáticos en función del número de polos en s=0.

$$G_2(s) = \frac{10(s+a)(s+b)}{s(s+n)(s+m)(s+p)} \tag{5.4}$$

$$G_3(s) = \frac{10(s+a)(s+b)}{s^2(s+n)(s+m)(s+p)} \tag{5.5}$$

El valor del coeficiente estático para las funciones (5.4) y (5.5):

$$k_v = \lim_{s\to 0} s\cdot G_2(s) = \frac{10\cdot a\cdot b}{n\cdot m\cdot p} \tag{5.6}$$

$$k_a = \lim_{s\to 0} s^2\cdot G_3(s) = \frac{10\cdot a\cdot b}{n\cdot m\cdot p} \tag{5.7}$$

Función	$G_1(s)$	$G_2(s)$	$G_3(s)$
k_p	$\frac{10\cdot a\cdot b}{n\cdot m\cdot p}$	∞	∞
k_v	0	$\frac{10\cdot a\cdot b}{n\cdot m\cdot p}$	∞
k_a	0	0	$\frac{10\cdot a\cdot b}{n\cdot m\cdot p}$
Ganancia normalizada	$\frac{10\cdot a\cdot b}{n\cdot m\cdot p}$	$\frac{10\cdot a\cdot b}{n\cdot m\cdot p}$	$\frac{10\cdot a\cdot b}{n\cdot m\cdot p}$

Tabla 5.1 Expresión de los coeficientes estáticos de posición, velocidad y aceleración y ganancia normalizada de Bode de la funciones $G_1(s)$, $G_2(s)$ y $G_3(s)$.

A nivel gráfico, se debe deducir la ganancia normalizada y el número de polos en s=0 que existen en el módulo de la respuesta frecuencial. Cuando existe un polo en s=0 en la respuesta frecuencial de un sistema, éste se distingue por los tramos con pendiente -20db/década o -6db/octava en la zona de bajas frecuencias del diagrama de Bode en módulo de un sistema. En el caso de un par de polos en s=0, se distingue de la misma forma, pero por los tramos de -40db/década. Y, en general, para un número n de polos en s=0, se distinguen por los tramos con $-n\cdot 20$ db/déc.

Las figuras 5.2 y 5.3 muestran el módulo de los respectivos diagramas de Bode de las funciones $G_1(s)$ y $G_2(s)$, para a=5, b=16, n=2, m=4 y p=10.

Según la figura 5.2, el nivel en decibelios (db) a bajas frecuencias tiende a ser constante y de valor 20db, por tanto ya se observa en esta figura que el sistema, del cual se supone que sólo se conoce la respuesta frecuencial mostrada, no tiene polos en s=0 y, en consecuencia, el nivel de 20db a la

frecuencia de ω=
régimen estaciona

Para el caso de la
este sistema tiene
contribución en ω
corresponde con l
normalizada corre
estacionario de ve

5.3.2 Margen de f

El margen de fa
sobreimpulso que
existente entre el
fase aumenta, el m
máximo sobreimp
mejora del sobrei
empeoramiento de
ejemplo la función

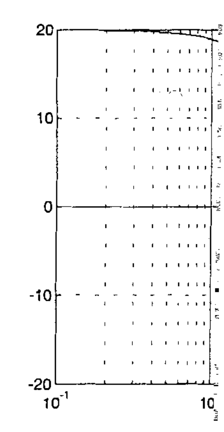


Fig. 5.2 Respuesta

frecuencia de ω=0.1 rad/seg corresponde al coeficiente estático de posición, por lo que el error en régimen estacionario en lazo cerrado que tiene este sistema frente a una entrada escalón :

$$k_p = \text{Ganancia normalizada} = 10$$

$$e_{ssp} = \frac{1}{1+k_p} = \frac{1}{1+10} = 0.09$$

Para el caso de la figura 5.3, se distingue una pendiente a frecuencias bajas de -20db/déc, por lo que este sistema tiene un polo en s=0. Como la contribución de este polo en ω=1 rad/seg es 0 db y la contribución en ω=0.1 rad/seg es de 20 db (pendiente -20 db/déc), el término de ganancia normalizada corresponde con la diferencia 40db - 20 db= 20db. Como el sistema tiene un polo en s=0, la ganancia normalizada corresponde con el coeficiente estático de velocidad, por lo que el error en régimen estacionario de velocidad será:

$$e_{ssv} = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{10} = 0.1$$

5.3.2 Margen de fase y máximo sobreimpulso

El margen de fase de la respuesta frecuencial de un sistema proporciona una cierta idea del sobreimpulso que éste cometerá cuando sea realimentado, frente una entrada escalón. La relación existente entre el margen de fase y el máximo sobreimpulso es inversa, es decir, cuando el margen de fase aumenta, el máximo sobreimpulso disminuye, y viceversa, cuando el margen de fase disminuye, el máximo sobreimpulso aumenta. Puede decirse que un incremento del margen de fase se traduce en una mejora del sobreimpulso y, al contrario, que un decremento del margen de fase se traduce en un empeoramiento del sobreimpulso. Para ilustrar mejor este comportamiento se tomará a modo de ejemplo la función de transferencia siguiente :

$$G(s) = \frac{k'}{s(s+6)(s+18)} \tag{5.8}$$

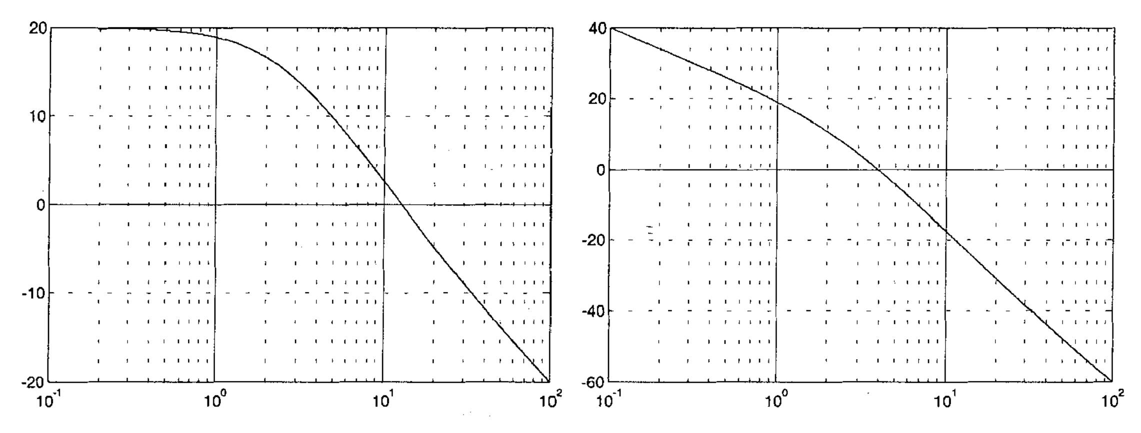


Fig. 5.2 Respuesta frecuencial en módulo de $G_1(s)$ *Fig. 5.3 Respuesta frecuencial en módulo de $G_2(s)$*

Fig. 5.4 Respuesta frecuencial del sistema con función de transferencia (5.8). En la gráficas se distinguen el margen de fase y la respuesta temporal en lazo cerrado para las valores k'=2381, 1080, 367.76 y 110.14

Para disponer de diferentes márgenes de fase, se obtendrá la respuesta frecuencial para varios valores del término constante de la ecuación (5.8) : k' =2381, 1080, 367.76 y 110.14. La figura 5.4 muestra como empeora la respuesta a una entrada escalón a medida que el margen de fase es menor, obteniendo cada vez un mayor sobreimpulso y un número mayor de oscilaciones hasta alcanzar el régimen estacionario. Vista esta relación entre sobreimpulso y margen de fase, el objetivo a conseguir por un control frecuencial ha de ser mejorar, en la medida de lo posible, el margen de fase del sistema.

5.3.3 Margen

El margen de soportar un si transferencia (5 por 180° de $|G(j\omega_{-180°})| \cong$ ganancia en el igual a 0 db. És es :

Las figuras 5 respectivamente polos complejo decirse que para comprendido en

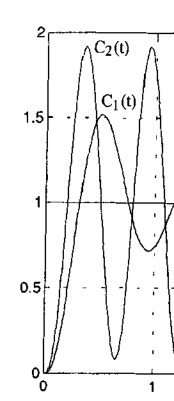


Fig. 5.5 Respue. del sis

5.3.4 Frecuenci

La frecuencia d puesto que un in para un sistema reducción en la crecimiento, figu

La figura 5.7 mu última gráfica, p unitaria del esca régimen estacion

5.3.3 Margen de ganancia y máximo incremento de ganancia permisible.

El margen de ganancia indica de forma directa el incremento de ganancia que todavía es capaz de soportar un sistema realimentado hasta llegar al borde de la inestabilidad. Con la función de transferencia (5.8) y observando la figura 5.4 para k'=1080, puede deducirse una frecuencia de cruce por 180° de $\omega_{-180^\circ} \cong 10.2 \text{ rad/seg}$, y un valor de ganancia para esta frecuencia de $|G(j\omega_{-180^\circ})| \cong -7.6\text{db}$, por tanto el margen de ganancia es de 7.6 db. De esta manera, el aumento de ganancia en el sistema realimentado todavía puede ser de 7.6 db, para que el margen de ganancia sea igual a 0 db. Éste aumento se corresponde linealmente con 2.4, así que la máxima ganancia permisible es :

$$k = k' \cdot 2.4 \cong 2592$$

Las figuras 5.5 y 5.6 muestran la respuesta temporal obtenida para k'=1080 y k'=2592, respectivamente. Queda claro que la última ganancia proporciona una respuesta oscilatoria y que los polos complejo-conjugados en lazo cerrado, en este caso, son imaginarios puros. También, puede decirse que para el sistema descrito por la función de transferencia (5.8), el margen de estabilidad está comprendido entre $0 < k' < 2592$.

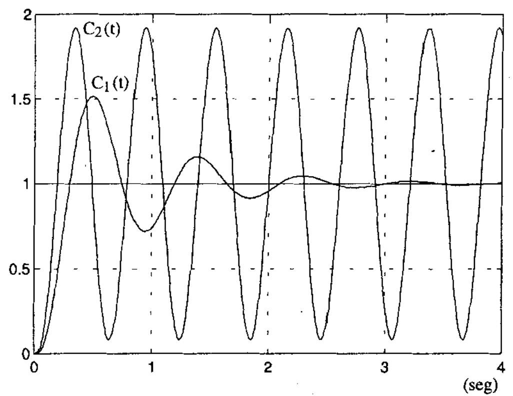


Fig. 5.5 Respuesta frecuencial en módulo y fase del sistema (5.8) para k'=1080.

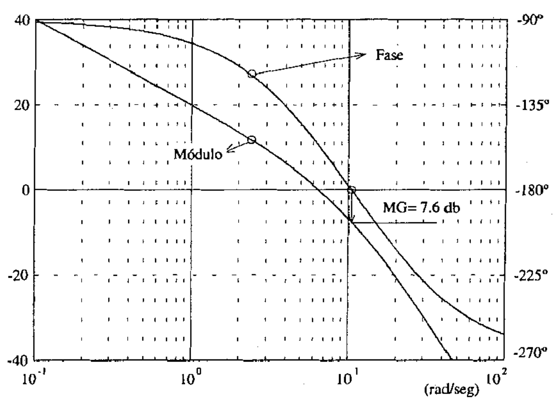


Fig. 5.6 Respuesta temporal a una entrada escalón para k'=1080, $C_1(t)$, y para k'=2592, $C_2(t)$.

5.3.4 Frecuencia de transición y rapidez en la respuesta temporal.

La frecuencia de transición y la rapidez en la respuesta temporal están directamente relacionados, puesto que un incremento de la frecuencia de transición implica una velocidad de reacción más rápida para un sistema determinado y, por contra, un decremento en la frecuencia de transición implica una reducción en la velocidad de respuesta. Esta relación puede observarse determinando el tiempo de crecimiento, figura 5.7, para las cuatro respuestas temporales de la figura 5.4.

La figura 5.7 muestra el tiempo de crecimiento y el tiempo de pico para diferentes valores de k'. En la última gráfica, para k'=110.14, al carecer de sobreimpulso y no sobrepasar la respuesta la amplitud unitaria del escalón, el tiempo de crecimiento se mide al 90 % del valor de salida alcanzado en régimen estacionario. Para las frecuencias de transición ω_t = 1, 3, 6.3 y 10 rad/seg se obtienen unos

tiempos de crecimiento de $t_r = 2$, 0.85, 0.5 y 0.2 seg, respectivamente, por lo se observa de manera clara esta relación existente entre la frecuencia de transición y la velocidad del respuesta del sistema.

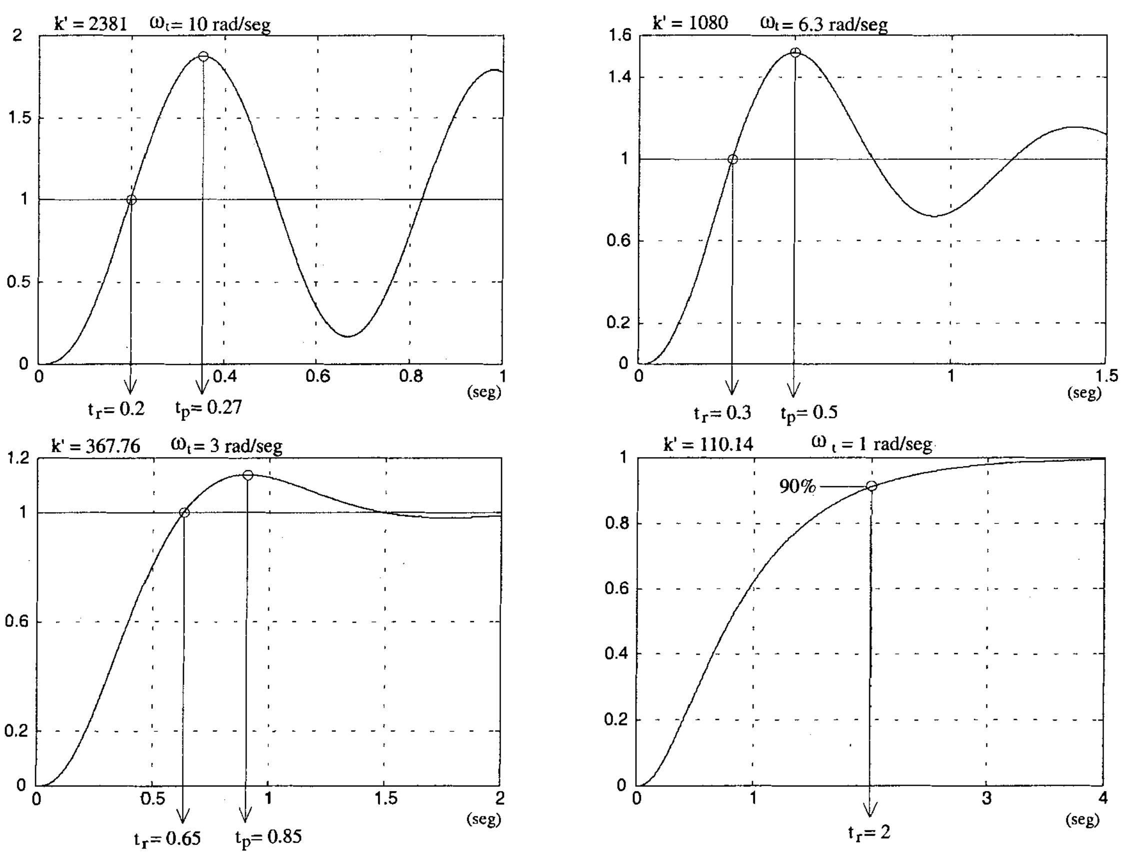


Fig. 5.7 Respuesta temporal al escalón en lazo cerrado para valores k'=2381, 1080, 367.76 y 110.14 de la función (5.8). En las gráficas se distinguen el tiempo de crecimiento t_r y el tiempo de pico t_p, excepto para k'=110.14 donde no existe sobreimpulso.

5.4 Compensador proporcional (P)

El compensador proporcional amplifica directamente la señal de error, de forma que:

$$m(t) = k_p \cdot e(t) \tag{5.9}$$

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = k_p$$

A nivel frecuencial se deben considerar los efectos en módulo y en fase del compensador sobre un sistema cualquiera. Luego, si la respuesta en módulo del control proporcional es constante, ec. (5.10), y su contribución en fase es nula, para un valor positivo de ganancia, entonces, en módulo el

compensador añadirá o restará una cantidad constante en decibelios a la respuesta frecuencial de un sistema, y en fase no modificará su respuesta frecuencial.

$$|D(j\omega)| = 20\log k_p \quad \text{(db)} \qquad (5.10)$$
$$\angle D(j\omega) = 0^{\circ}$$

Observando la figura 5.4, considerando una constante k'=1080 en la ecuación (5.8) y añadiendo un término de ganancia proporcional a esta ecuación, puede tomarse como función de transferencia a emplear a modo de ejemplo:

$$G(s) = \frac{1080 \cdot k_p}{s(s+6)(s+18)} \qquad (5.11)$$

Con esta función de transferencia, los valores de k_p que corresponden a las constantes k'=110.14, 367.76, 1080 y 2381 de la función (5.8), son 0.10198, 0.3405, 1 y 2.2046, respectivamente, es decir, con estos valores de ganancia se obtienen las mismas respuestas frecuenciales y temporales que las mostradas en la figura 5.4 . En consecuencia, en cuanto a estabilidad relativa, se observa que para valores de ganancia menores que la unidad, $k_p < 1$, los márgenes de fase y de ganancia aumentan, figura 5.7 para k'=110.14 y k'=367.76, mejorando así la estabilidad del sistema. Sin embargo, para valores de ganancia mayores que la unidad, $k_p > 1$, los márgenes de fase y de ganancia disminuyen, figura 5.7 para k'=2381, empeorando la estabilidad del sistema.

A nivel temporal, los efectos del control son evidentes, puesto que un aumento de k_p implica un aumento del margen de fase y, al mismo tiempo, una disminución del máximo sobreimpulso, debido a que la relación entre el margen de fase y el máximo sobreimpulso es inversa. De forma similar, una disminución de la ganancia implica un aumento del margen de fase y una disminución del máximo sobreimpulso.

En cuanto a rapidez en la respuesta temporal, se debe tener en cuenta que la relación existente entre la ganancia y la frecuencia de cruce por 0 db es directa, y que la relación entre la frecuencia de cruce por 0 dB y el tiempo de crecimiento o el tiempo de pico es directa también, véase la figura 5.4. Por tanto, un incremento de la ganancia produce un incremento en la frecuencia de cruce por 0 dB y un incremento de los tiempos de crecimiento y de pico; y a la inversa, una disminución de la ganancia produce una disminución de la frecuencia de cruce y de los tiempos de crecimiento y de pico.

En definitiva, tal como muestran las figuras 5.4, 5.6 y 5.7, un aumento en la ganancia del control proporcional tiende a empeorar la estabilidad relativa del sistema disminuyendo los márgenes de fase y de ganancia y aumentando el máximo sobreimpulso y la velocidad de respuesta del sistema (debe considerarse que el máximo incremento de ganancia posible consiste en el valor del margen de ganancia). A la inversa, una disminución de la ganancia mejora la estabilidad relativa del sistema incremetando los márgenes de fase y de ganancia y disminuyendo el máximo sobreimpulso y ralentizando la velocidad de respuesta del sistema.

5.5 Compensador proporcional-integral (PI)

La compensación proporcional-integral consiste en el diseño del mismo controlador PI temporal explicado con anterioridad, capítulo 3. No obstante, este diseño se realizará ahora desde el punto de vista frecuencial. La acción de control y la función de transferencia del compensador PI es:

$$m(t) = k_p \cdot e(t) + k_i \int e(t)dt \tag{5.12}$$

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} = k_i \frac{\left(1 + \frac{k_p}{k_i} s\right)}{s} \tag{5.13}$$

Tomando $a = \frac{k_p}{k_i}$ y $k = ki$, la expresión del compensador PI es:

$$D(j\omega) = k\frac{(1 + j\omega a)}{j\omega} \tag{5.14}$$

$$|D(j\omega)| = 20\log k + 20\log|1 + j\omega a| - 20\log|j\omega| \tag{5.15}$$

$$\angle D(j\omega) = -90^\circ + \operatorname{arctg}(a\omega) \tag{5.16}$$

La figura 5.8 muestra la respuesta frecuencial de un compensador PI para un valor de a=0.5 y k=1, donde se observa como el compensador tiene una contribución negativa en fase, restando fase, y como en módulo tiene una característica decreciente, atenuando la respuesta frecuencial.

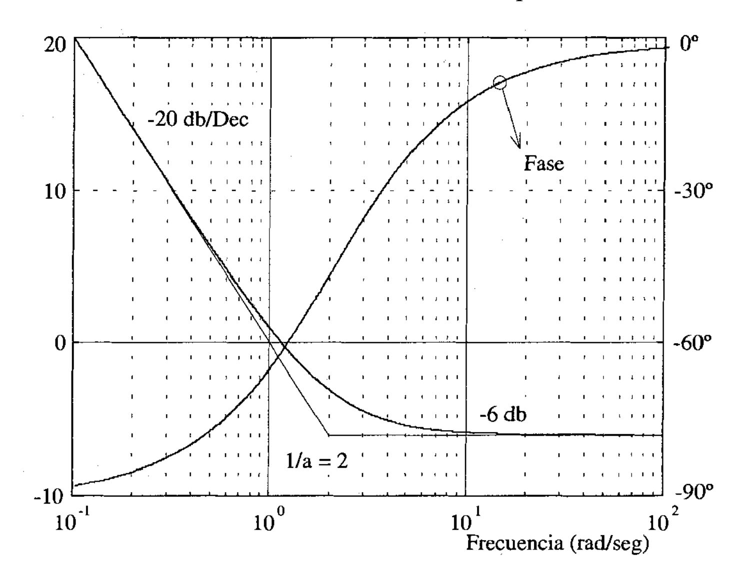


Fig. 5.8 Respuesta frecuencial de un compensador PI con el cero situado en 1/a = 2 rad/seg.

El diseño del compensador PI viene determinado principalmente por la sustracción de fase que realiza a bajas frecuencias, lo que limita en gran medida el grado de libertad de éste. El compensador PI

introduce un polo en s=0, cuyo efecto en fase es restar 90° en la respuesta frecuencial, figura 5.8, aunque el cero del compensador PI tiende a contrarrestar este efecto añadiendo fase al sistema, de manera que a altas frecuencias el compensador PI apenas tiene influencia sobre el sistema que se desea compensar.

El diseño del compensador PI se debe realizar con el propósito de mejorar el margen de fase del sistema; no obstante, este propósito parece inicialmente difícil de conseguir, puesto que el compensador PI resta fase al sistema. Por tanto, para minimizar el efecto del compensador es conveniente que el cero del PI esté situado por debajo de la frecuencia de cruce por 0db del sistema, de forma que el compensador reste la menor cantidad de grados posible sobre el nuevo margen de fase del sistema compensado.

Para aumentar el margen de fase del sistema compensado, se consideran los siguientes factores: primero el hecho de que la respuesta frecuencial de la mayor parte de los sistemas tiene una característica de fase decreciente, (un mayor número de polos que de ceros), y segundo, el hecho de que el compensador PI atenúa el módulo de la respuesta frecuencial en aquellas frecuencias que están por encima de la posición del cero (1/a). En consecuencia, para mejorar el margen de fase del sistema a compensar, se debe situar el cero del compensador por debajo de la nueva frecuencia de transición o de cruce por 0db, a una distancia prudencial en que el compensador tenga poco efecto en fase sobre ésta. Además, como el compensador atenúa la respuesta en módulo en las frecuencias por encima de la situación del cero, figura 5.9, la frecuencia de transición del sistema compensado será menor que la frecuencia de transición del sistema sin compensar, lo que causa que el margen de fase del sistema compensado sea mayor que el margen de fase del sistema sin compensar, debido al carácter decreciente de la curva de fase del sistema sin compensar.

En definitiva, el compensador PI reduce la frecuencia de transición, ralentizando la respuesta temporal del sistema compensado, e incrementa el margen de fase, mejorando la estabilidad relativa y disminuyendo el máximo sobreimpulso. En la figura 5.9 se observan los diagramas de Bode en módulo y fase del sistema sin compensar (planta), con la función de transferencia mostrada en la ec. (5.11), del compensador PI con el cero situado en 1/a=0.3 rad/seg y del sistema compensado (planta más control PI, mostrado en línea gruesa).

El módulo y la fase de la respuesta frecuencial del sistema compensado corresponden con la suma de los módulos y fases del sistema sin compensar G(s) y del compensador PI D(s), de forma que el módulo y la fase del sistema compensado son :

$$|G_{LA}(j\omega)| = |D(j\omega)| + |G(j\omega)| \tag{5.17}$$

$$\angle G_{LA}(j\omega) = \angle D(j\omega) + \angle G(j\omega) \tag{5.18}$$

En la curva de módulo de la figura 5.9, se observa como el compensador PI causa una disminución de la frecuencia de transición en el sistema compensado (pasa de ω_{0db} a ω'_{0db}), factor que, observando la curva de fase, se traduce en un aumento del margen de fase para el sistema compensado (pasa de MF_0 a MF_d) respecto del sistema sin compensar.

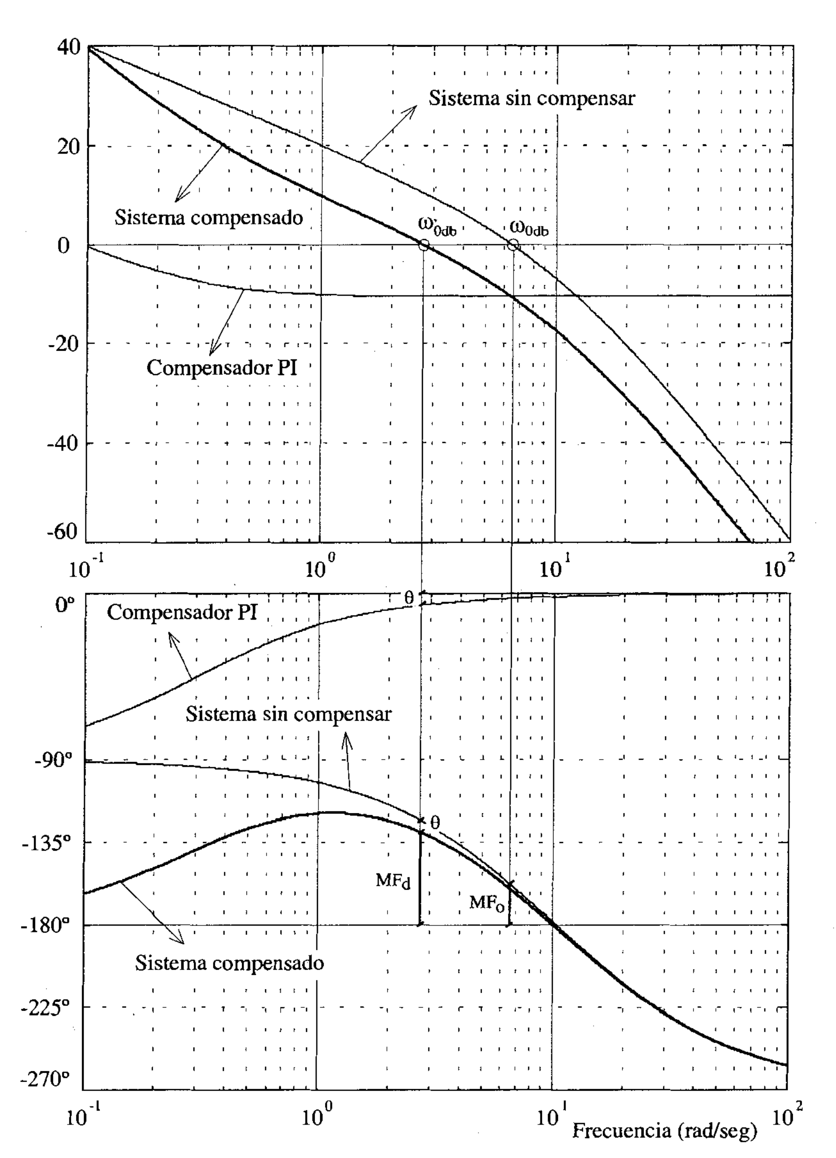


Fig. 5.9 Diagrama de Bode en módulo y fase del sistema sin compensar, ec. (5.11)(planta), del compensador PI (cero en 1/a=0.3 rad/seg) y del sistema compensado (planta más compensador PI, en trazo grueso).

La ubicación del cero del compensador es tal que en la curva de fase de la respuesta frecuencial, fig. 5.9, se observa como se produce una resta de casi 90° en la frecuencia ω=0.1 rad/seg. Esta resta va disminuyendo a medida que aumenta la frecuencia hasta llegar a la frecuencia de cruce por -180°, a partir de la cual se observa un solapamiento entre la fase del sistema compensado, ec. (5.17), y la fase del sistema sin compensar, ec. (5.10).

Justo encima del margen de fase obtenido en el sistema compensado, MF_d, se subraya la diferencia en grados, θ, entre la curva de fase del sistema compensado (planta más compensador PI) y la curva de fase del sistema sin compensar (sólo planta). El valor de esta diferencia depende de cuán alejado esté

el cero del compensador, 1/a, de la nueva frecuencia de transición, ω'_{0db}. Al parámetro θ se le denomina "remanente de fase" y para que tenga un valor pequeño se debe situar el cero del compensador PI, 1/a, a una distancia alejada de la nueva frecuencia de transición. Como criterio de diseño, se sitúa el cero del compensador a una década de la nueva frecuencia de transición ($\omega_{cero} = \omega'_{0db}/10$), de manera que se puede estimar aproximadamente un valor de 10° para el remanente de fase θ. Este valor es válido para cualquier sistema donde se aplique el compensador PI, puesto que la estimación es empírica, tomando un valor por encima de lo habitual.

El diseño del compensador PI utiliza como base la curva de fase de la respuesta frecuencial del sistema que se desea compensar, ya que en la nueva frecuencia de transición, ω'_{0db}, sólo es necesario considerar el remanente de fase, θ, para tener el margen de fase deseado MF_d. De hecho, debe considerarse que la respuesta frecuencial del sistema sin compensar es el único dato real que el diseñador dispone para abordar el diseño del compensador PI.

El diseño completo del compensador PI utilizado en la figura 5.9 se explicará de forma detallada en el siguiente ejemplo, donde además se mostrarán las respuestas temporales del sistema sin compensar, ec. (5.19) y la del sistema compensado (planta más compensador PI).

Ejemplo 5.1

Se desea diseñar un compensador PI con el fin de conseguir un margen de fase de 45° para un sistema cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{1080}{s(s+6)(s+18)} \tag{5.19}$$

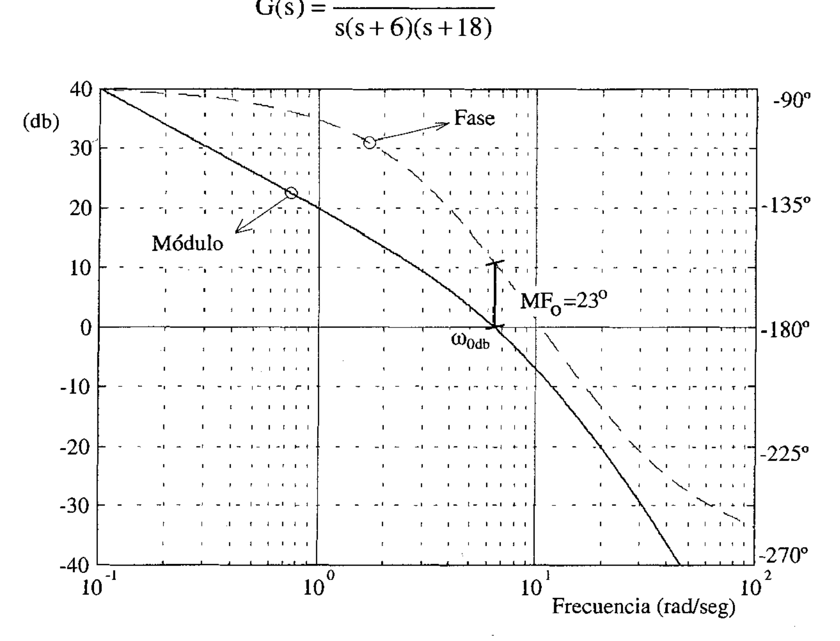


Fig. 5.10 Diagrama de Bode en módulo y fase de la función de transferencia (5.19).

En la figura 5.10 se muestra el diagrama de Bode en módulo y fase de la respuesta frecuencial del sistema (5.19), donde se observa que la frecuencia de transición es de ω_{0db} =6.4 rad/seg y un margen de fase de MF_o =23°, aproximadamente.

La nueva frecuencia de transición se obtiene sobre la curva de fase de la respuesta frecuencial de la figura 5.10, donde es necesario buscar la frecuencia que permite el margen de fase deseado de 45°. Para ello, teniendo en cuenta que el margen de fase se mide desde la línea de -180° y que el remanente de fase para el PI es de θ =10° (tomando $\omega_{cero} = \omega'_{0db}/10$), el valor de la fase del sistema sin compensar es:

$$\angle G(j\omega) = -180 + MF_d + \theta = -125° \tag{5.20}$$

Luego la nueva frecuencia de transición, ω'_{0db}, será aquella que tenga -125° en la curva de fase del sistema sin compensar. Observando la curva de fase, figura 5.10, esta frecuencia es aproximadamente $\omega \approx 3$ rad/seg. En esta nueva frecuencia de transición el módulo del compensador y el módulo del sistema sin compensar deben cumplir:

$$\left|D(j\omega'_{0db})\right|_{db} + \left|G(j\omega'_{0db})\right|_{db} = 0 \tag{5.21}$$

La nueva frecuencia de transición se puede obtener también analíticamente si se conoce la función de transferencia del sistema a compensar, como es en éste caso. A partir de la función de transferencia se puede plantear la expresión analítica de la fase del sistema:

$$\angle G(j\omega'_{0db}) = -90° - \operatorname{arctg}\frac{\omega'_{0db}}{6} - \operatorname{arctg}\frac{\omega'_{0db}}{18} = -125° \tag{5.22}$$

La ecuación (5.22) es una ecuación no lineal y debe resolverse mediante métodos de cálculo numérico, aunque la forma más sencilla consiste en probar varios valores de ω'_{0db} hasta que, tras sucesivos intentos, se llegue a un valor aproximado de la cantidad de grados esperada (-125°). Resolviendo (5.22) se obtiene aproximadamente el valor de 3 rad/seg, que coincide con el valor obtenido gráficamente en la figura 5.10.

En la relación (5.21) es preciso conocer el valor del módulo del compensador PI en la nueva frecuencia de transición, luego la ec. (5.21) se puede reescribir en:

$$\left|D(j\omega'_{0db})\right|_{db} = -\left|G(j\omega'_{0db})\right|_{db} \tag{5.23}$$

Observando la figura 5.10, el módulo de la respuesta frecuencial en la nueva frecuencia de transición, $\omega'_{0db} = 3$ rad/seg, es aproximadamente 9.4db. En consecuencia, el compensador PI deberá atenuar esta cantidad para que la frecuencia de 3 rad/seg sea, en realidad, la nueva frecuencia de transición. Como el cero del compensador PI, $\omega_{cero} = 1/a$, se sitúa, como criterio de diseño, a una década de la

nueva frecuencia de transición, ($\omega_{cero} = \omega'_{0db} / 10 = 0.3$ rad/seg), es necesario conocer de qué parámetro depende la atenuación que causa el compensador PI en las frecuencias que están por encima de la posición del cero.

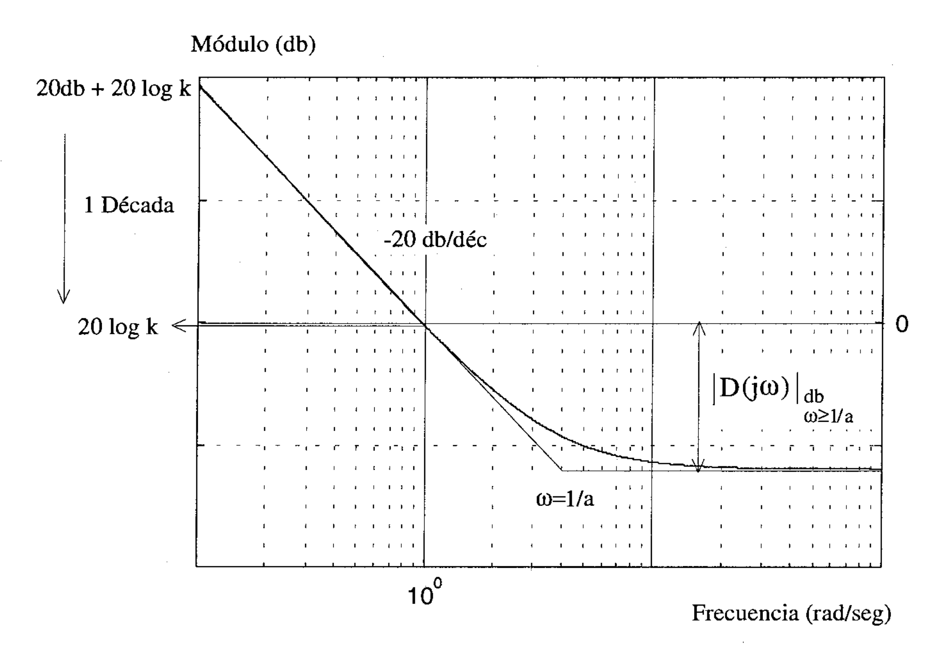


Fig. 5.11 Diagrama de Bode en módulo para un compensador PI con un cero y un valor de k determinados.

Observando la curva asintótica en módulo de la respuesta frecuencial del compensador PI, figura.5.11, para una ubicación determinada del cero, 1/a, y para un valor de k determinado, es posible determinar la expresión de la atenuación del compensador .

$$|D(j\omega)|_{\omega \geq 1/a} = 20\log k - 20\log\frac{1}{a} = 20\log k_p \tag{5.24}$$

Por tanto, la atenuación que causa el compensador PI tan sólo depende de la ganancia proporcional k_p, ec. (5.24), pudiendo reescribir la ec. (5.20) :

$$|D(j\omega'_{0db})|_{db} = 20\log k_p = -|G(j\omega'_{0db})|_{db} \tag{5.25}$$

Y como $|G(j\omega'_{0db})|_{db} = 9.4\text{db}$, entonces se obtiene k_p=0.3388 y $k_i = 0.1016$.

La expresión final del compensador PI:

$$|D(j\omega)| = 0.3388 + \frac{0.1016}{s} = 0.1016\frac{(3.33s+1)}{s} \tag{5.26}$$

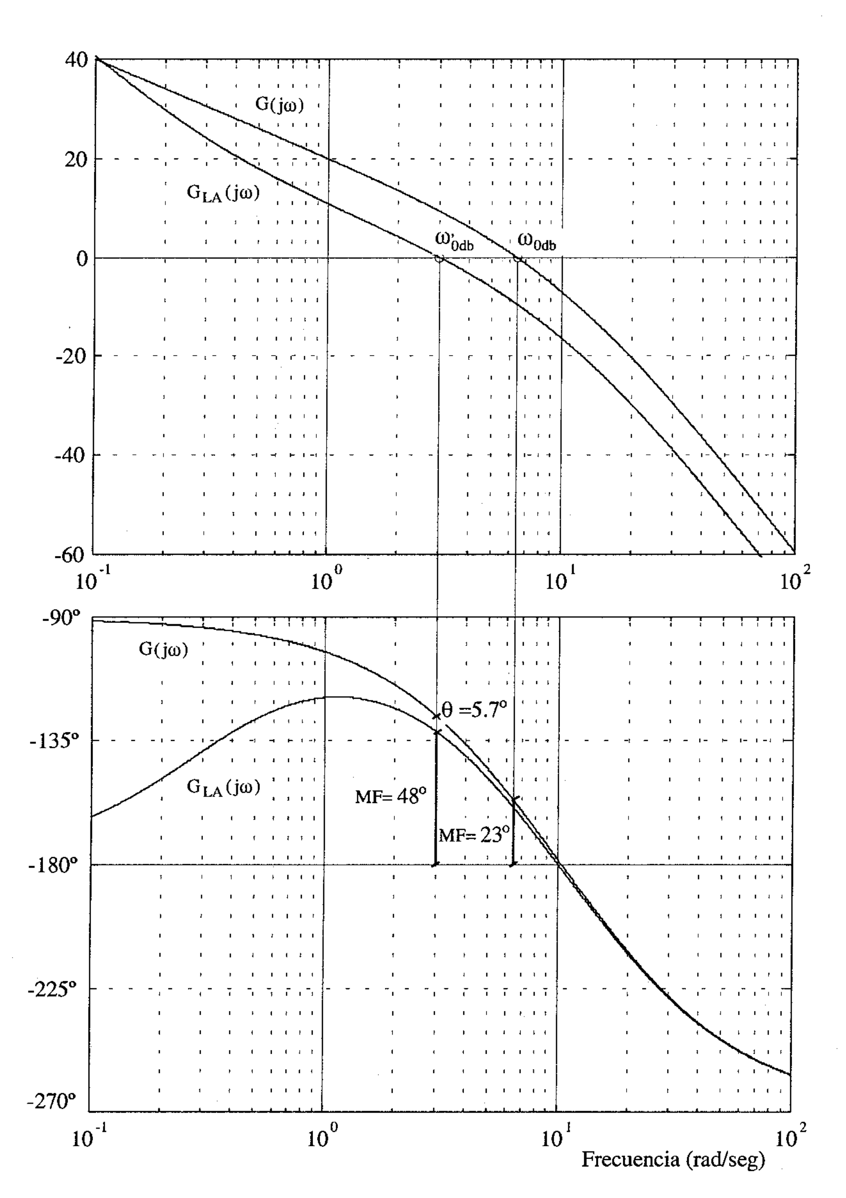


Fig. 5.12 Diagrama de Bode en módulo y fase del sistema sin compensar, G(jω), y del sistema compensado, G_{LA} (jω) (planta más compensador).

La expresión final del sistema compensado (planta más PI):

$$G_{LA}(s) = D(s) \cdot G(s) = \frac{109.785}{s(s+6)(s+18)} \cdot \frac{(3.33s+1)}{s} \tag{5.27}$$

La figura 5.12 muestra el diagrama de Bode en módulo y fase del sistema inicial, G(s), y del sistema compensado, D(s). La figura 5.13 muestra la respuesta temporal del sistema inicial, G(s), y la del sistema compensado, D(s), de forma que puede observarse el efecto temporal del compensador PI.

El remanente de fase θ que aparece en la figura 5.12 es de 5.7°, por lo que la estimación del remanente se ha realizado por encima de su valor real, repercutiendo ello en el incremento de unos pocos grados en el margen de fase.

En la figura 5.13, se observa como el compensador PI, al reducir la frecuencia de cruce por 0 db, aumenta los tiempos de crecimiento, t_r , y de pico, t_p , en la respuesta temporal. Además, también aumenta el margen de fase del sistema compensado, por lo que se disminuye el sobreimpulso. El compensador PI mejora el error en régimen estacionario, puesto que introduce un polo en s=0. En la figura 5.13, el tiempo de pico en el sistema sin compensar, G(s), es de 0.5 seg., mientras que para el sistema compensado, $G_{LA}(s)$, el tiempo de pico es de 0.9 seg, aproximadamente. El máximo sobreimpulso para G(s) es del 50%, mientras que para $G_{LA}(s)$ es del 24%, aproximadamente

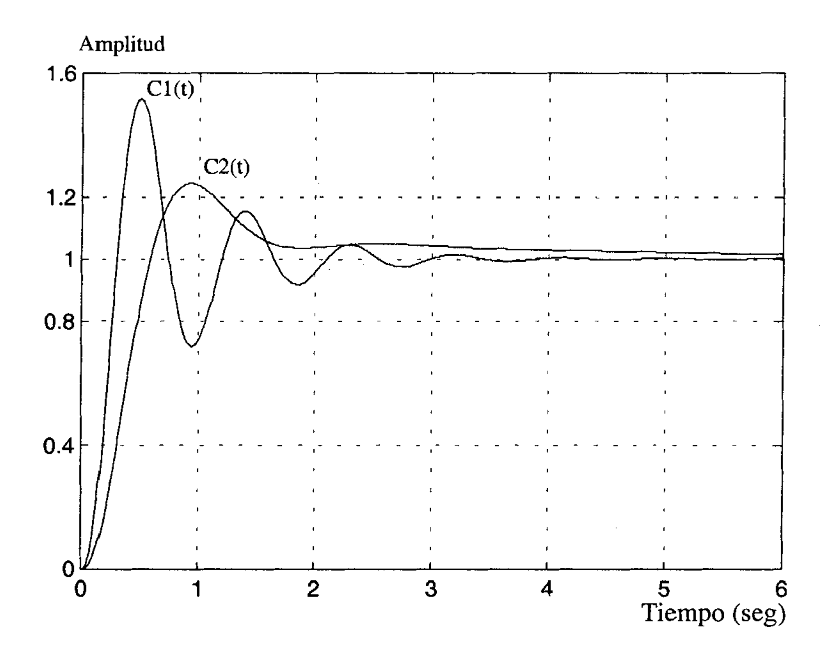


Fig. 5.13 Respuesta temporal en lazo cerrado frente a una entrada del tipo escalón unitario, para el sistema sin compensar, C1(t), y del sistema compensado, C2(t) (planta más compensador).

5.6 Compensador proporcional-derivativo (PD)

La función de transferencia del compensador PD es:

$$m(t) = k_p \cdot e(t) + k_d \cdot \frac{d}{dt} e(t) \tag{5.28}$$

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = k_p + k_d \cdot s = k_p \left(1 + \frac{k_d}{k_p} \cdot s\right) \tag{5.29}$$

Tomando $a = \dfrac{k_d}{k_p}$ y $k = k_p$, la expresión del compensador es:

$$D(j\omega) = k(1 + j\omega a) \tag{5.30}$$

$$|D(j\omega)| = 20\log k + 20\log|1 + j\omega a| \tag{5.31}$$

$$\angle D(j\omega) = \mathrm{arctg}(a\omega) \tag{5.32}$$

La figura 5.14 muestra la respuesta frecuencial del compensador PD para un valor de a=0.5 y k=1. En esta figura se puede ver como el compensador PD añade fase al sistema, por lo que puede incrementar en gran medida el margen de fase del sistema a compensar. Además, el compensador PD añade 20 db/déc en módulo a partir de las frecuencias que están por encima de la posición del cero del compensador (1/a).

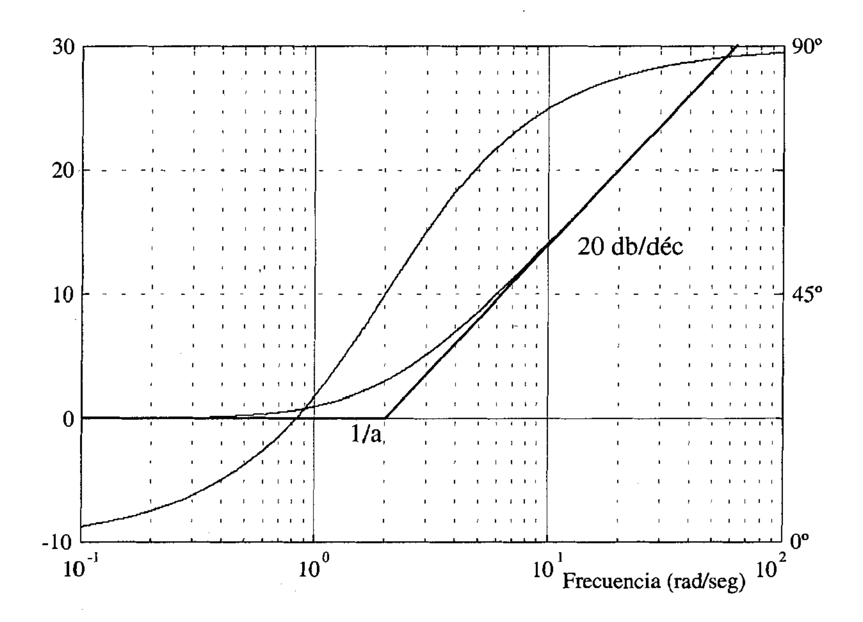


Fig. 5.14 Respuesta frecuencial de un compensador PD con el cero situado en 1/a=2 rad/seg.

Con el compensador PD se consigue, pues, aumentar el margen de fase del sistema, mejorando la estabilidad relativa de éste. El diseño del compensador debe realizarse para que la aportación de fase que realiza sobre el sistema sea lo máxima posible, aunque ésta dependerá principalmente de la ubicación del cero del compensador, 1/a, puesto que puede incrementar la frecuencia de cruce por 0db en el módulo de la respuesta frecuencial.

La figura 5.15 muestra el diagrama de Bode en módulo y fase del sistema cuya función de transferencia se definía en la ecuación (5.19), al que se aplica un compensador PD con distintas situaciones del cero (1/a= 1, 10 y 20 rad/seg). En esta figura, cuando el cero del compensador PD se sitúa por debajo de la frecuencia de transición del sistema sin compensar (6.4 rad/seg), provoca un

gran aumento de la frecuencia de transición del sistema compensado, que pasa a ser de 30 rad/seg, ya que incrementa la curva en módulo en un factor de 20 db/déc. Así, el margen de fase no acaba teniendo un incremento del margen de fase tan significativo como el que cabía esperar.

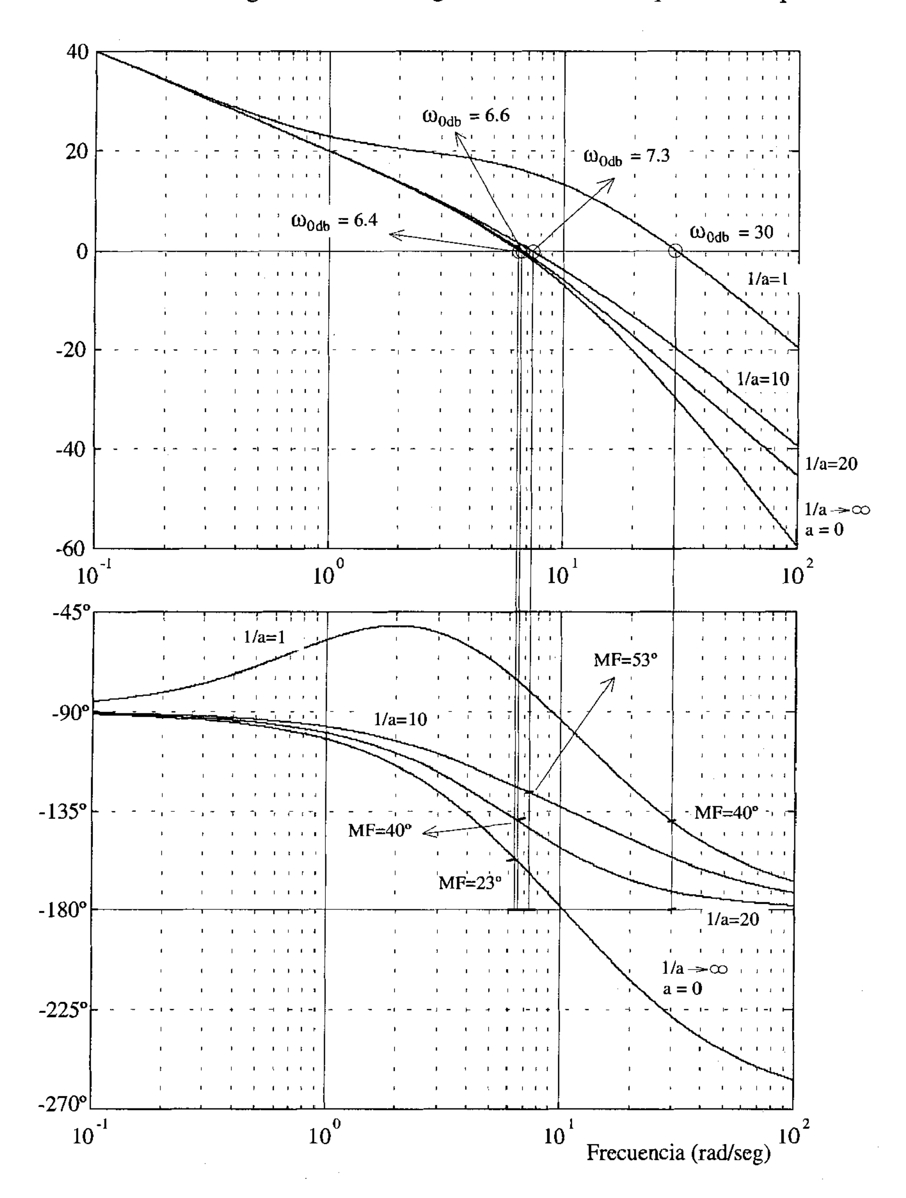


Fig. 5.15 Diagrama de Bode en módulo y fase de sistema, ec. (5.19), con un compensador PD con distintas ubicaciones del cero 1/a= 0, 1, 10 y 20 rad/seg.

El máximo margen de fase (MF=53°) se obtiene en este caso con el cero en 1/a=10 rad/seg. A nivel temporal, figura 5.16, el compensador PD, al aumentar el margen de fase y la frecuencia de transición del sistema, disminuye el máximo sobreimpulso y acelera la respuesta temporal, por lo que los tiempos de pico y de crecimiento disminuyen.

En la figura 5.16 se muestran las respuestas temporales frente a una entrada del tipo escalón unitario para las situaciones del cero del compensador en 1/a = 1, 10 y 20 rad/seg. La respuesta temporal C1(t) es la correspondiente al sistema sin compensar, ec. (5.19), y las respuestas C2(t), C3(t) y C4(t), corresponden a las situaciones del cero en 1, 10 y 20 rad/seg, respectivamente.

La repuesta temporal C2(t) es la más rápida de todas, puesto que la frecuencia de transición para 1/a=1 rad/seg es de 30 rad/seg, siendo bastante mayor que la del sistema inicial (6.4 rad/seg). En las respuestas temporales de C2(t), C3(t) y C4(t), se observa un menor sobreimpulso que en C1(t), debido a que tienen un mayor margen de fase. En la figura 5.16, también se observa como la respuesta C3(t), 1/a=20 rad/seg, es ligeramente más rápida que C4(t), 1/a=10 rad/seg, debido a que la frecuencia de transición de C3(t), 7.3 rad/seg, es mayor que la frecuencia de transición de C4(t), 6.6 rad/ seg.

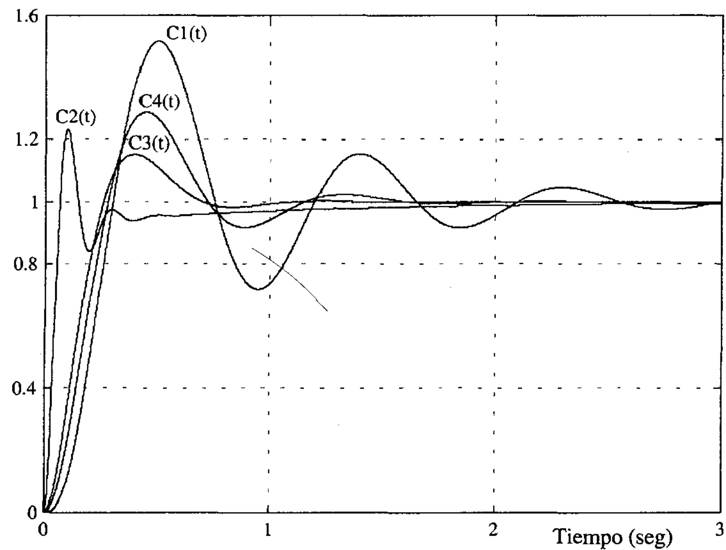


Fig. 5.16 Respuesta temporal frente a una entrada escalón unitario del sistema sin compensar, C1(t), con un compensador PD con distintas ubicaciones del cero 1/a= 0, 1, 10 y 20 rad/seg que corresponden a las respuestas temporales C2(t), C3(t) y C4(t), respectivamente.

El compensador PD mejora las características temporales del sistema que se debe compensar, aunque hay que procurar que el diseño del compensador no afecte demasiado al valor de la nueva frecuencia de transición. En este apartado se ha efectuado un diseño del compensador situando el cero en distintas posiciones 1/a= 1, 10 y 20 rad/seg, obteniendo los mejores resultados en 1/a = 10 rad/seg.

5.7 Compensador proporcional-integral-derivativo (PID)

La función de transferencia del compensador PID es:

$$m(t) = k_p \cdot e(t) + k_d \cdot \frac{d}{dt} e(t) + k_i \cdot \int e(t)dt \qquad (5.33)$$

$$D(s)=\frac{M(s)}{E(s)}=k_p+k_d\cdot s+\frac{k_i}{s} \tag{5.34}$$

A nivel frecuencial, la función de transferencia (5.34) del compensador PID se puede reescribir de manera que se puede tomar como el producto de un compensador PD con un compensador PI :

$$D(s)=\frac{M(s)}{E(s)}=(1+k_d\cdot s)\left(k_{p2}+\frac{k_{i2}}{s}\right) \tag{5.35}$$

Luego, a nivel frecuencial, el diseño de un compensador PID se realiza como una implementación en cascada de un compensador PI junto con un compensador PD, por lo que se deben considerar las características de ambos compensadores en el diseño.

El compensador PI aumenta el margen de fase y reduce la frecuencia de transición del sistema, mientras que el compensador PD también aumenta el margen de fase y aumenta la frecuencia de transición del sistema. En consecuencia, con un compensador PID es posible obtener un margen de fase mucho mayor que el obtenido con un compensador PI o un compensador PD individualmente. La combinación de ambos compensadores debe permitir un mayor margen de fase, manteniendo o mejorando, al mismo tiempo, la velocidad de respuesta original del sistema.

Si al compensador PI diseñado anteriormente, ec. (5.25) y (5.26), se le añade el compensador PD de la figura 5.15, para 1/a= 10 rad/seg, se dispone en definitiva de un compensador PID, que consigue un mayor margen de fase que el inicialmente especificado (MF = 45°). La frecuencia de transición del sistema así compensado es la que impone el compensador PI, 3 rad/seg, fig. 5.17, puesto que el compensador PD tiene el cero en 1/a=10 rad/seg y apenas afecta en módulo a ésta frecuencia.

Otra forma de diseñar un compensador PID consiste en mejorar el margen de fase del sistema al mismo tiempo que se trata de mantener el valor de la frecuencia de transición del sistema que hay que compensar. Para ello, se propone el siguiente ejemplo de diseño, donde se desea un margen de fase de 45° para el sistema definido por la ecuación (5.18) y donde se utiliza el compensador PD de la figura 5.15 con 1/a=10 rad/seg. Luego, se diseñará un compensador sobre la siguiente función de transferencia (planta más compensador PD) :

$$G(s)=\frac{1080}{s(s+6)(s+18)}\cdot(0.1s+1)=\frac{10\left(\frac{s}{10}+1\right)}{s\left(\frac{s}{6}+1\right)\left(\frac{s}{18}+1\right)} \tag{5.36}$$

La función de transferencia del compensador PI que se ha de diseñar es :

$$D(j\omega)=k\frac{(1+j\omega a)}{s}$$

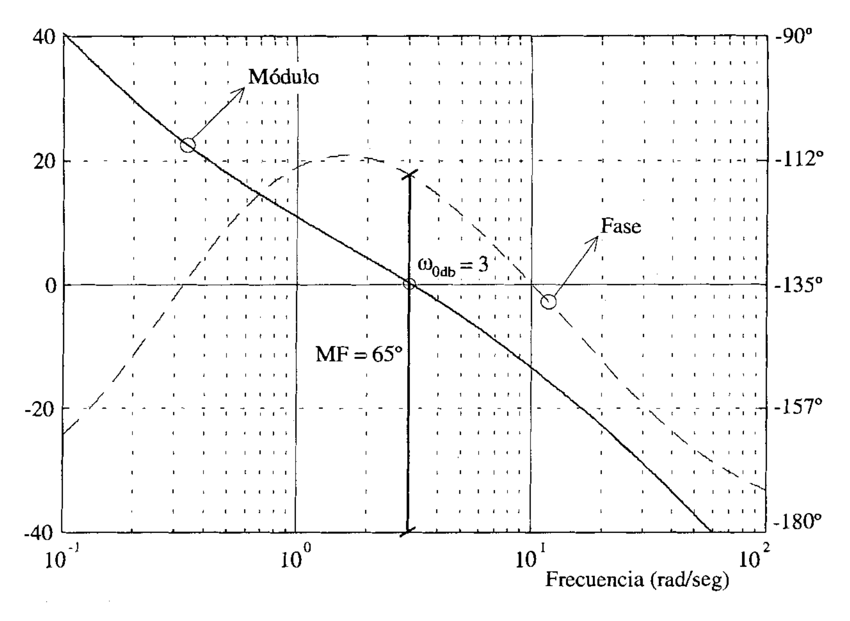


Fig. 5.17 Diagrama de Bode en módulo y fase para el sistema de la ec. (5.18) con el compensador PI de la ec. (5.25) y el compensador PD de la fig. 5.15 para 1/a= 10 rad/seg. El margen de fase es de 65 grados.

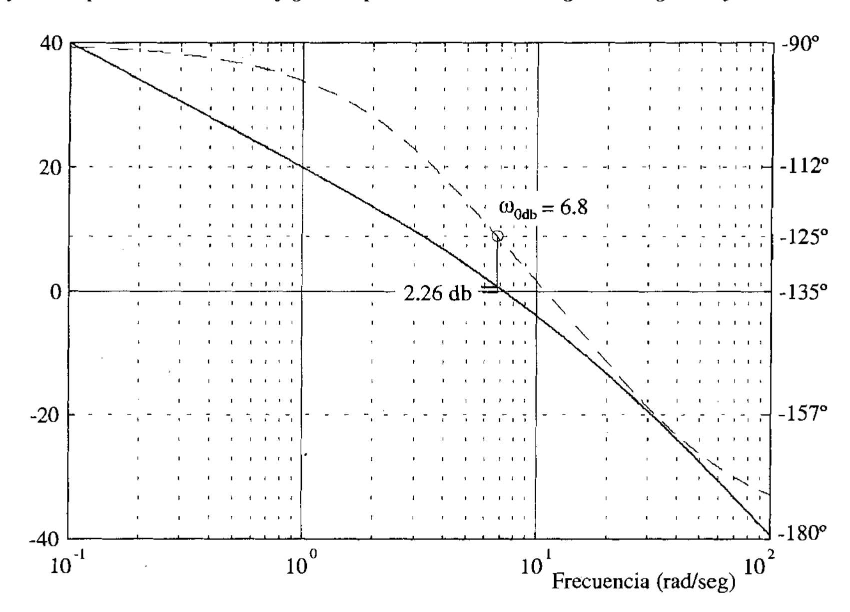


Fig. 5.18 Respuesta frecuencial en módulo y fase del sistema descrito por la función de transferencia (5.36).

Para obtener un margen de fase de 45°, considerando que el remanente de fase para el PI es de θ=10°, aplicando la ecuación (5.20) se debe cumplir :

$$\angle G(j\omega) = -180° + MF_d + \theta = -125°$$

Observando l
frecuencia de
para que esta
los 2.26 db qu

Además, com
frecuencia de

Según el diseñ

La respuesta f
temporal, C1(t
mostrado en la

Fig. 5.19 F

Tal como se o
el diseño del l

Observando la respuesta frecuencial, fig. 5.18, de la función de transferencia (5.36), se obtiene que la frecuencia de $\omega \approx 6.8$ rad/seg es la que tiene -125° de fase, por lo que se diseñará el compensador PI para que esta frecuencia sea la nueva frecuencia de transición, teniendo el compensador que atenuar los 2.26 db que hay en módulo para esta frecuencia:

$$|D(j\omega)|_{\omega \geq 1/a} = -2.26 \text{ db} = 20 \log k_p \quad \Rightarrow \quad k_p = 0.77$$

Además, como por criterio el cero del compensador PI se debe colocar a una década de la nueva frecuencia de transición, el valor de la ganancia integral será:

$$\frac{1}{a} = \frac{k_i}{k_p} = 0.68 \text{ rad / seg.} \qquad \Rightarrow \qquad k_i = 0.5236$$

Según el diseño efectuado, la función de transferencia del compensador PID es :

$$G_{PID}(s) = 0.5236 \cdot (0.1s + 1) \cdot \left(\frac{(1/0.68)s + 1}{s} \right) \tag{5.37}$$

La respuesta frecuencial del sistema compensado, ec (5.37), se muestra en la figura 5.19. La respuesta temporal, C1(t), del sistema sin compensar, ec. (5.18), junto con la respuesta temporal, C2(t), del PID mostrado en la figura 5.17 y del PID propuesto en la ec. (5.37), C3(t), se muestran en la figura 5.20.

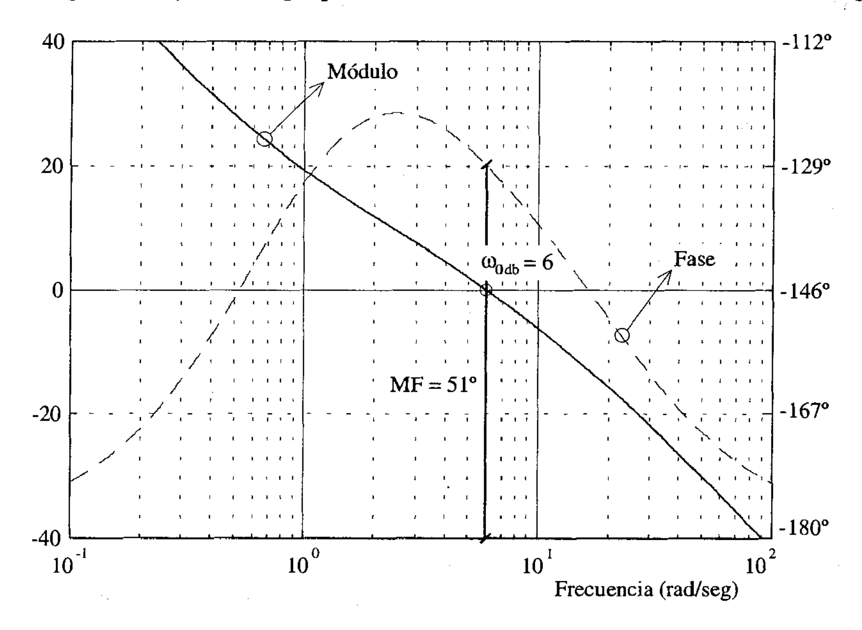


Fig. 5.19 Respuesta frecuencial en módulo y fase del sistema compensado según el PID de la ec. (5.37).

Tal como se observa en la figura 5.20, la respuesta temporal C3(t) es más rápida que C2(t), puesto que el diseño del PID obtiene una frecuencia de transición de 6 rad/seg, bastante próxima a la frecuencia

de transición del sistema original, C1(t). La respuesta temporal C2(t) tiene menor sobreimpulso al tener un mayor margen de fase, MF=65°.

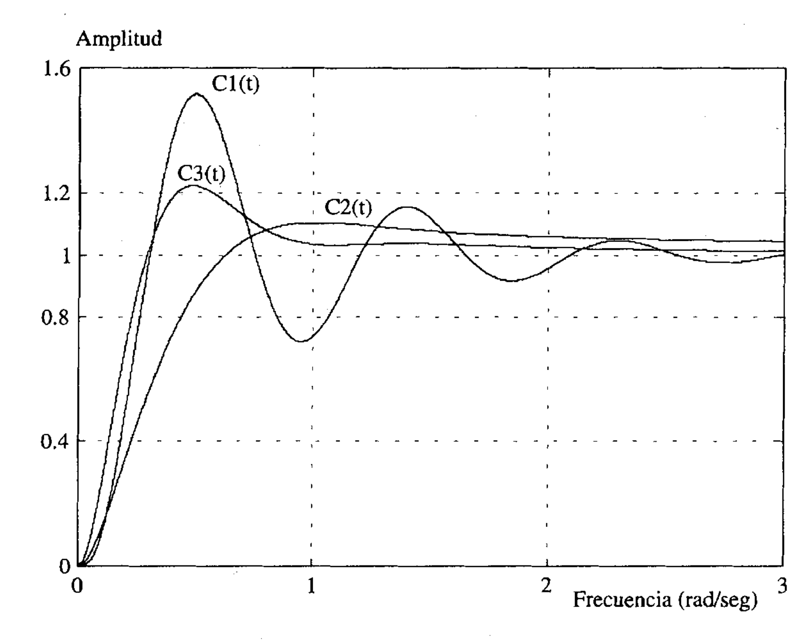


Fig. 5.20 Respuesta temporal frente a una entrada escalón unitario para el sistema sin compensar, C1(t), ec. (5.18), para el PID de la figura 5.17, C2(t), y para el PID propuesto en la ec. (5.37), C3(t).

5.8 Compensación en adelanto de fase

El compensador en adelanto tiene la característica de introducir un cero y un polo en el sistema a compensar, con una separación que depende de un parámetro α de diseño. La función de transferencia normalizada del compensador en adelanto es :

$$D(s)=\frac{M(s)}{E(s)}=\alpha\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}=\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \quad ; \quad \alpha<1 \tag{5.38}$$

$$D(j\omega)=\alpha\frac{1+j\omega T}{1+j\omega\alpha T} \tag{5.39}$$

En esta función de transferencia se puede observar como el polo del compensador está siempre situado a una frecuencia mayor que la posición del cero, estando el cero y el polo del compensador distanciados por una separación que depende del valor de α. En la figura 5.21 se puede ver el efecto que tiene en frecuencia el compensador en adelanto, observándose como añade fase al sistema y afecta al módulo de la respuesta frecuencial, incrementándolo en aquellas frecuencias que están por encima de la posición del cero del compensador. Por tanto, el compensador en adelanto se empleará directamente en mejorar el margen de fase del sistema que se desea compensar.

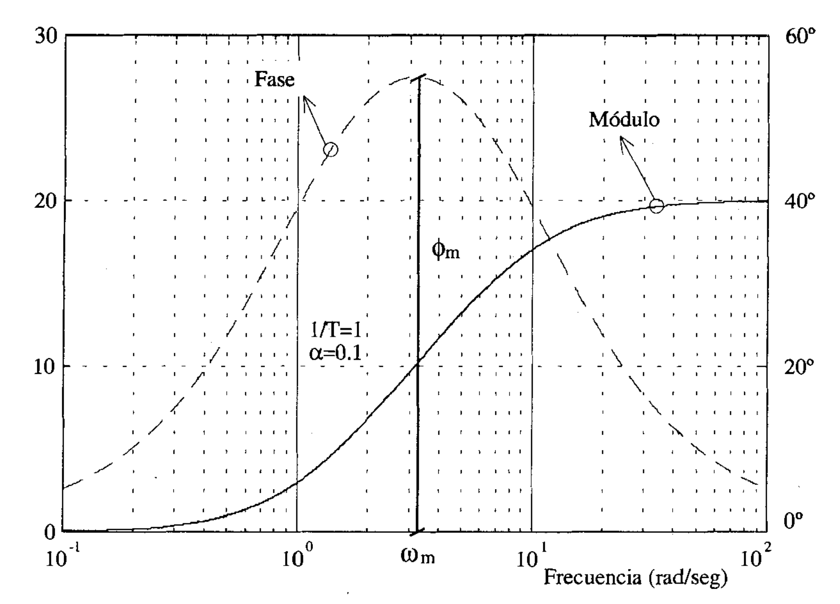


Fig. 5.21 Respuesta frecuencial de un compensador en adelanto con el cero situado en 1 rad/seg y el polo en 10 rad/seg (α = 0.1). La atenuación en módulo debido al factor α no se ha considerado.

En la figura 5.21 se observa como el compensador en adelanto añadirá fase al sistema, siendo ϕ_m la máxima cantidad de fase que el compensador puede añadir. A esta cantidad, ϕ_m, se le denomina "máximo desfase", siendo un dato importante en el diseño del compensador, pues como criterio de diseño se situará ϕ_m en la nueva frecuencia de transición, tratando así de añadir la máxima cantidad de fase posible al margen de fase del sistema compensado.

Es importante, pues, determinar la frecuencia en que se produce el maximo desfase y el valor que adquiere en función de la situación del cero y del polo del compensador. Este análisis se realizará mediante el diagrama polar del compensador en adelanto, cuya expresión es :

$$D(j\omega) = \alpha\sqrt{\frac{1+(\omega T)^2}{1+(\omega\alpha T)^2}} \angle\left[\text{arctg }(\omega T) - \text{arctg }(\omega\alpha T)\right] \tag{5.40}$$

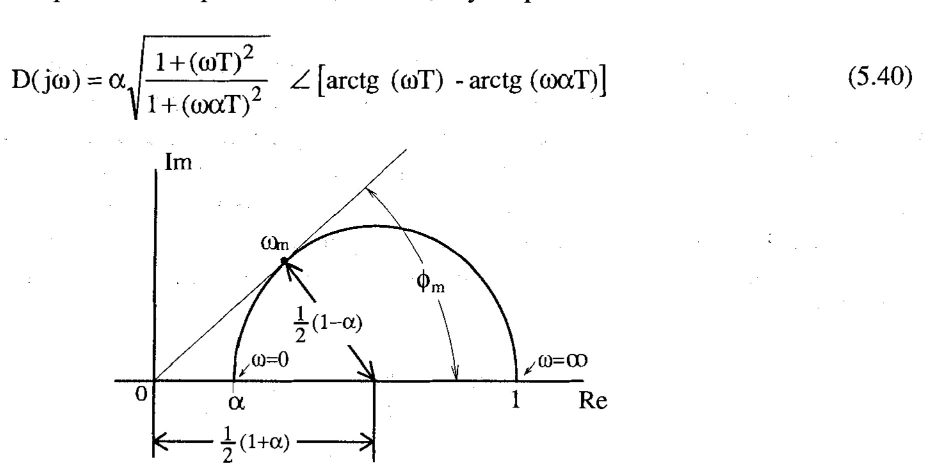


Fig. 5.22: Diagrama polar de un compensador en adelanto.

Realizando un análisis asintótico de la ec. (5.40) :

$$\omega \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad D(j\omega) \to \ \alpha \angle 0^\circ$$
$$\omega \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad D(j\omega) \to \ 1 \angle 0^\circ$$

Desarrollando la parte real e imaginaria de la ec. (5.39) se puede llegar a la expresión de un círculo, fig. 5.22, cuyo centro está situado en el eje real en $(1+\alpha)/2$ y con un radio de valor $(1-\alpha)/2$.

A partir del diagrama polar de la figura 5.22, puede determinarse la expresión del máximo desfase ϕ_m que se produce en la frecuencia ω_m, en que la fase del diagrama polar del compensador es máxima :

$$\text{sen } \phi_m = \frac{(1-\alpha)/2}{(1+\alpha)/2} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

$$\phi_m = \text{arcsen } \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \qquad (5.41)$$

La frecuencia ω_m está en una posición intermedia entre la posición del cero y la posición del polo del compensador en adelanto, fig. 5.21. Teniendo en cuenta que la escala frecuencial del diagrama de Bode es logarítmica se puede deducir:

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \qquad (5.42)$$

Para que la fase añadida por el compensador en adelanto sea lo más efectiva posible, como criterio de diseño es preciso que ω_m coincida con la nueva frecuencia de transición del sistema compensado;, por ello es necesario conocer el efecto en módulo que tiene el compensador en adelanto a la frecuencia intermedia ω_m. A partir del módulo de la ecuación (5.40) para $\omega = \omega_m$, se obtiene :

$$|D(j\omega)|_{\omega=\omega_m} = \sqrt{\alpha} \qquad (5.43)$$

Con la ecuaciones (5.39), (5.41), (5.42) y (5.43) se está en disposición de realizar el diseño de un compensador en adelanto. No obstante, el compensador atenúa la respuesta frecuencial en módulo del sistema, debido a que el factor α de la ec. (5.39) es siempre menor que la unidad, lo que implica un deterioro en el error en régimen estacionario del sistema. Esta atenuación puede evitarse con una implementación electrónica adecuada del compensador. Si el compensador se implementa con una red pasiva, se puede conectar ésta a un amplificador de ganancia $1/\alpha$, de manera que la atenuación quede eliminada. De esta forma, al evitar la atenuación, las ecuaciones de diseño del compensador (5.39) y (5.43) pasan a ser:

$$D_a(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{\alpha} = \frac{1+j\omega T}{1+j\omega\alpha T} \qquad (5.44)$$

$$|D_a(j\omega)|_{\omega=\omega_m} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \qquad (5.45)$$

Ejemplo 5.2

Se desea diseñar
fin de conseguir

Tal y como apa
frecuencia de tra

Para conseguir u
máximo ϕ_m en

El problema de
desconocido y, e
única solución es
por encima de ω
de la curva de fa
como -180+MF
debido a la pend
siendo habitual
conveniente que
posible error con

El máximo desfa

Ejemplo 5.2

Se desea diseñar un compensador en adelanto para el sistema definido por la ecuación (5.18), con el fin de conseguir un margen de fase de 45°.

$$G_{LA}(s) = \frac{1080}{s(s+6)(s+18)}$$

Tal y como aparece en la figura 5.10, el margen de fase de este sistema es de $MF_o = 23°$ y la frecuencia de transición es de $\omega_{0\,db} = 6.4$ rad/seg.

Para conseguir un margen de fase de 45°, el compensador en adelanto deberá incorporar un desfase máximo ϕ_m en la nueva frecuencia de transición del sistema compensado de:

$$\phi_m = MF_d - \angle G_{LA}(j\omega'_{0\,db}) \qquad (5.46)$$

El problema de hallar ϕ_m reside en que el valor de la nueva frecuencia de transición es todavía desconocido y, en consecuencia, no se puede tener un valor exacto de la fase del sistema en $\omega'_{0\,db}$. La única solución estriba en efectuar una estimación de la fase sabiendo que $\omega'_{0\,db}$ estará siempre situada por encima de $\omega_{0\,db}$. Según la figura 5.23, en la estimación de la fase debe considerarse la pendiente de la curva de fase en $\omega_{0\,db}$, por lo que la fase en la nueva frecuencia de transición se podrá tomar como $-180+MF_o$ más una cantidad estimativa de la pérdida sufrida en grados, "remanente de fase θ", debido a la pendiente negativa de la curva de fase. El valor del remanente de fase θ deberá estimarse, siendo habitual asignarle 5° si la pendiente es suave, o 12° si, por contra, la pendiente es fuerte. Es conveniente que la estimación se realice en exceso, de manera que exista margen para subsanar el posible error cometido en el diseño.

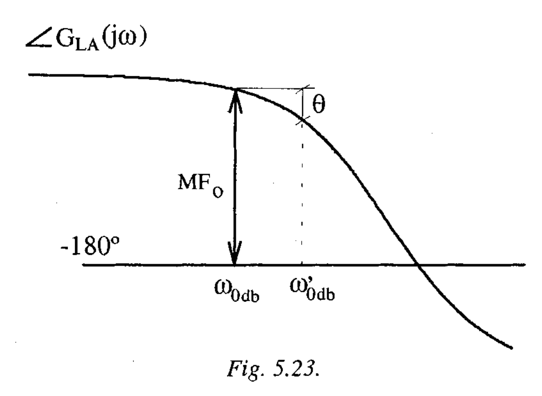


Fig. 5.23.

El máximo desfase, ϕ_m, a la nueva frecuencia de transición será :

$$\phi_m = MF_d - MF_o + \theta \qquad (5.47)$$

Tomando un remanente de fase θ de 12°, por considerar una pendiente alta en la curva de la fase, fig. 5.10, de la respuesta frecuencial del sistema que se desea compensar:

$$\phi_m = 45° - 23° + 12° = 34°$$

Despejando de la ecuación (5.41) se obtiene el valor de α :

$$\alpha = \frac{1 - \text{sen}\ \phi_m}{1 + \text{sen}\ \phi_m} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 0.2827 \tag{5.48}$$

Con este valor, como debe cumplirse la relación:

$$\left|D_a(j\omega_m)\right| + \left|G_{LA}(j\omega'_{0\ db})\right| = 0\ \text{db} \qquad \text{para} \qquad \omega_m = \omega'_{0\ db} \tag{5.49}$$

Sustituyendo (5.45) en (5.49), se obtiene:

$$\left|G_{LA}(j\omega'_{0\ db})\right| = -20\log\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = -5.48\ \text{db} \tag{5.50}$$

Luego, la nueva frecuencia de transición será aquella que en el módulo de la respuesta frecuencial del sistema sin compensar, ec. (5.18), tenga un módulo de -5.48 db. A partir de la figura 5.10 se deduce, de forma aproximada, que esta frecuencia corresponde con 9 rad/seg, pasando a ser la nueva frecuencia de transición. El valor del cero y del polo del compensador en adelanto, se obtienen utilizando la ec. (5.42) :

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = \omega'_{0\ db} = 9\ \text{rad / seg}$$

De donde: $\quad \frac{1}{T} = 4.78 \qquad$ y $\qquad \frac{1}{T\alpha} = 19.92$

La expresión del compensador en adelanto es :

$$D_a(j\omega) = 3.5373\frac{s + 4.78}{s + 19.92} \tag{5.51}$$

En la respuesta frecuencial del sistema compensado, fig. 5.24, se observa como el margen de fase obtenido en el sistema compensado es de 43°, dos grados por debajo de la especificación de 45°. Este error es debido a que la pendiente en torno a la frecuencia de transición del sistema sin compensar es más fuerte de lo estimado, por lo que se debía haber tomado un mayor valor de remanente de fase θ.

La respuesta temporal del sistema compensado en adelanto, C2(t) fig. 5.25 , es más rápida que la respuesta del sistema sin compensar, C1(t), ya que tiene una mayor frecuencia de transición.

En definitiva, el compensador en adelanto mejora la estabilidad relativa, puesto que aumenta el margen de fase. El compensador incrementa la frecuencia de transición y, en consecuencia, incrementa también la velocidad de respuesta del sistema. No obstante, debe tenerse en cuenta que un compensador en adelanto tiene un efecto paso-alto en frecuencia, lo que conlleva a un incremento del ruido en el sistema.

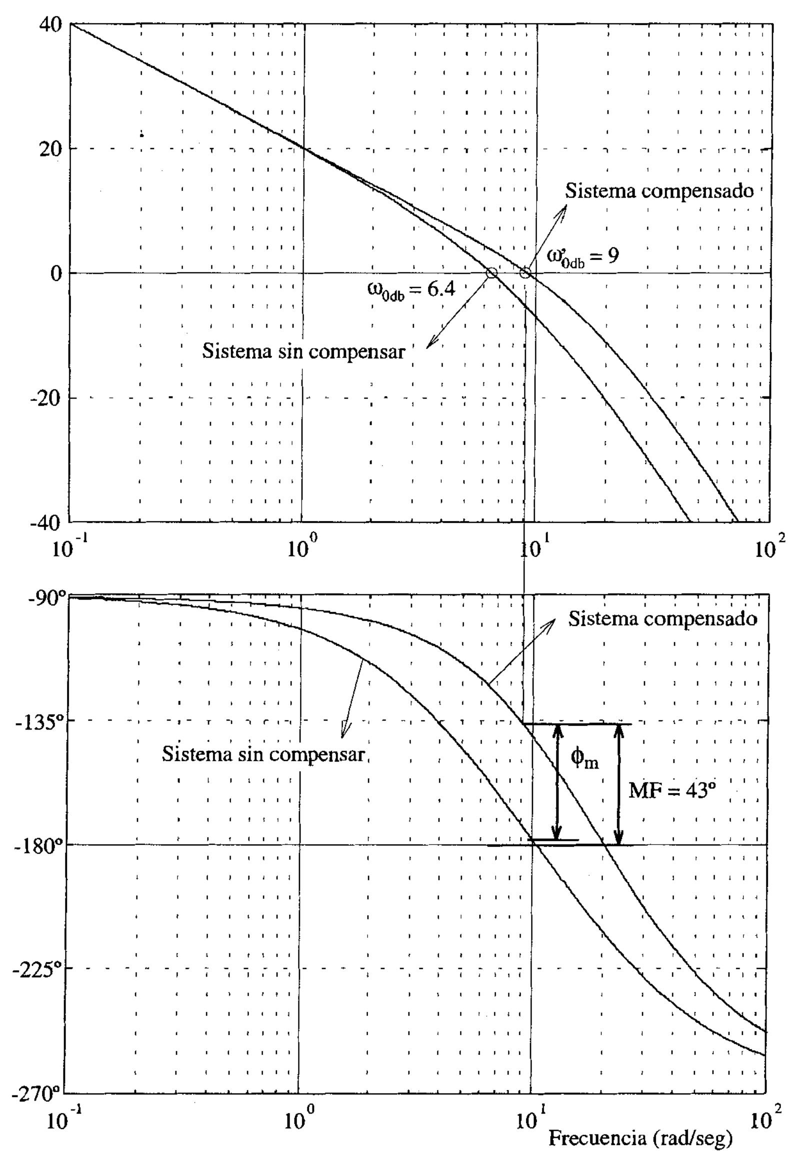


Fig. 5.24 Diagrama de Bode en módulo y fase para el sistema de la ec. (5.18) con el compensador en adelanto de la ec. (5.51).

Se debe ir con cautela cuando se pretende conseguir un máximo desfase cuyo valor esté por encima de los 60°, ya que el valor que adquiere α es muy pequeño, lo que implica una separación excesiva entre el cero y el polo del compensador. Esta situación incrementa mucho el ruido del sistema, puesto que la frecuencia de transición aumenta demasiado y el cero del compensador se sitúa cada vez más cerca de las bajas frecuencias, conllevando efectos no deseables en el control del sistema. Una posible solución consiste en utilizar varios compensadores en adelanto idénticos conectados en cascada, de forma que la compensación quede repartida de forma igual entre los compensadores y, por tanto, la separación entre cero y polo no ha de ser tan grande como en el caso de un único compensador.

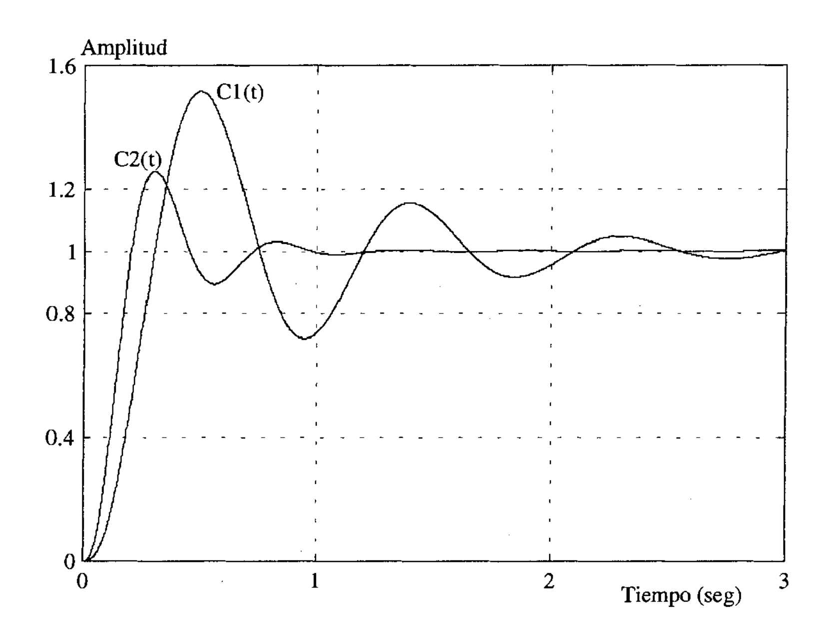


Fig. 5.25 Respuesta temporal frente a una entrada escalón del sistema compensado en adelanto C2(t) y del sistema sin compensar C1(t).

5.9 Compensación en retraso de fase

Un compensador en retraso de fase es bastante parecido a un compensador PI y su diseño se realiza de forma similar. El compensador en retraso de fase sitúa un polo y un cero en frecuencia, con una separación que depende de un parámetro de diseño β. El polo del compensador tiene la característica de estar ubicado a una frecuencia menor que la posición del cero. La expresión normalizada de la función de transferencia del compensador es :

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{1}{\beta}\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} = \frac{1+Ts}{1+\beta Ts} \qquad ; \qquad \beta > 1 \qquad (5.52)$$

$$D(j\omega) = \frac{1+j\omega T}{1+j\omega\beta T} \qquad (5.53)$$

En la figura 5.26 puede verse como también el compensador en retraso en frecuencia, al igual que el compensador PI, resta fase al sistema. Además, decrementa el módulo de la respuesta frecuencial, por lo que disminuye la frecuencia de transición del sistema compensado y, en consecuencia, ralentiza la respuesta temporal.

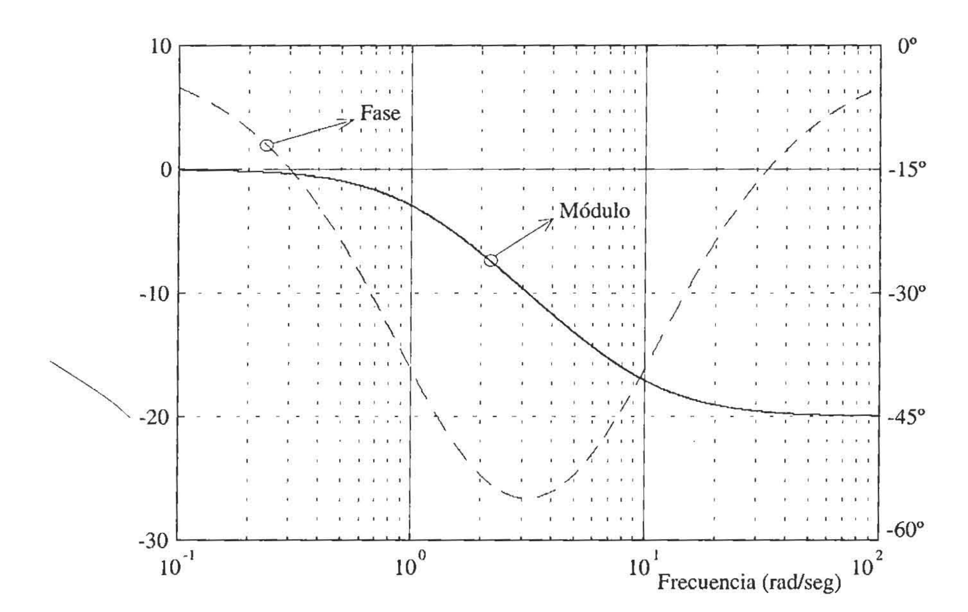


Fig. 5.26 Respuesta frecuencial de un compensador en retraso con el polo situado en 1 rad/seg y el cero en 10 rad/seg ($\beta = 10$).

El compensador en retraso de fase debe diseñarse situando el cero por debajo de la frecuencia de transición del sistema compensado, de manera que el compensador reste la mínima cantidad de grados posible sobre el margen de fase del sistema compensado. La mejora del margen de fase por parte del compensador en retraso es debida a la reducción que causa en la frecuencia de transición del sistema compensado, puesto que atenúa el módulo de la respuesta temporal, y a la característica decreciente de la curva de fase en la respuesta frecuencial de los sistemas.

El cero del compensador, por tanto, se sitúa como criterio de diseño a una década ($\omega_{cero} = \omega'_{0\,db}/10$) o a una octava ($\omega_{cero} = \omega'_{0\,db}/2$) de la frecuencia de transición del sistema compensado. El valor del remanente de fase θ es estimativo y depende de la posición del cero del compensador. Para una década se toma un remanente de 5 grados y para una octava se toma un remanente de 12 grados.

Para determinar el parámetro β del compensador en retraso es importante conocer la atenuación que éste introduce en las frecuencias que están por encima de la posición del cero del compensador. Para ello es necesario hacer un análisis a nivel asintótico del módulo de la respuesta frecuencial del compensador, fig. 5.27.

Teniendo en cuenta la pendiente asintótica de -20 db/déc, fig. 5.27, la posición del polo y del cero del compensador, y que el eje frecuencial de la fig. 5.27 es logarítmico, se puede determinar que el módulo del compensador para las frecuencias que están por encima de la posición del cero es:

$$|D(j\omega)|_{\omega \geq 1/T} = 20 \log \frac{1}{\beta} \tag{5.54}$$

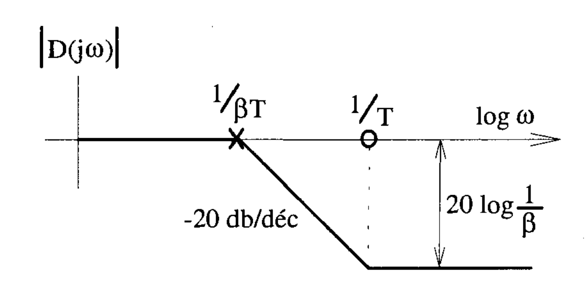


Fig. 5.27.

Para exponer de una manera clara el diseño de un compensador en retraso, se solucionará el mismo ejemplo propuesto con el compensador en adelanto, de manera que al final sea posible realizar una comparativa de la respuesta temporal de ambos tipos de compensadores.

Ejemplo 5.3

Se desea diseñar un compensador en retraso de fase para el sistema definido por la ecuación (5.19), para que el margen de fase sea de 45°.

El primer paso en el diseño del compensador consiste en determinar qué frecuencia de la curva de fase del sistema sin compensar permite el margen de fase especificado, considerando para ello el remanente de fase del compensador. Posteriormente, se debe situar esta frecuencia como la nueva frecuencia de transición del sistema compensado. El compensador puede ubicarse, como criterio de diseño, con el cero a una década o a una octava, indistintamente, de la nueva frecuencia de transición. En este caso se opta por situar el cero a una década, debiendo considerar, en consecuencia, un remanente de fase θ de 5°.

Para tener un margen de fase de 45°, la nueva frecuencia de transición, en la curva de fase del sistema sin compensar, debe tener una fase :

$$\angle G_{LA}(j\omega) = -180° + MF_d + \theta = -180° + 45° + 5° = -130°$$

A partir de la curva de fase de la figura 5.10 se observa como, aproximadamente, la frecuencia de 3.3 rad/seg tiene -130°, por lo que se tomará como la nueva frecuencia de transición para el sistema compensado. La posición del cero del compensador será, pues :

$$\omega_{cero} = \frac{1}{T} = \frac{\omega'_{0\,db}}{10} = 0.33 \text{ rad / seg}$$

Esta frecuencia será la nueva frecuencia de transición si se cumple la misma condición de la ec. (5.20):

$$\left|D(j\omega'_{0\,db})\right|_{db} + \left|G_{LA}(j\omega'_{0\,db})\right|_{db} = 0 \qquad (5.55)$$

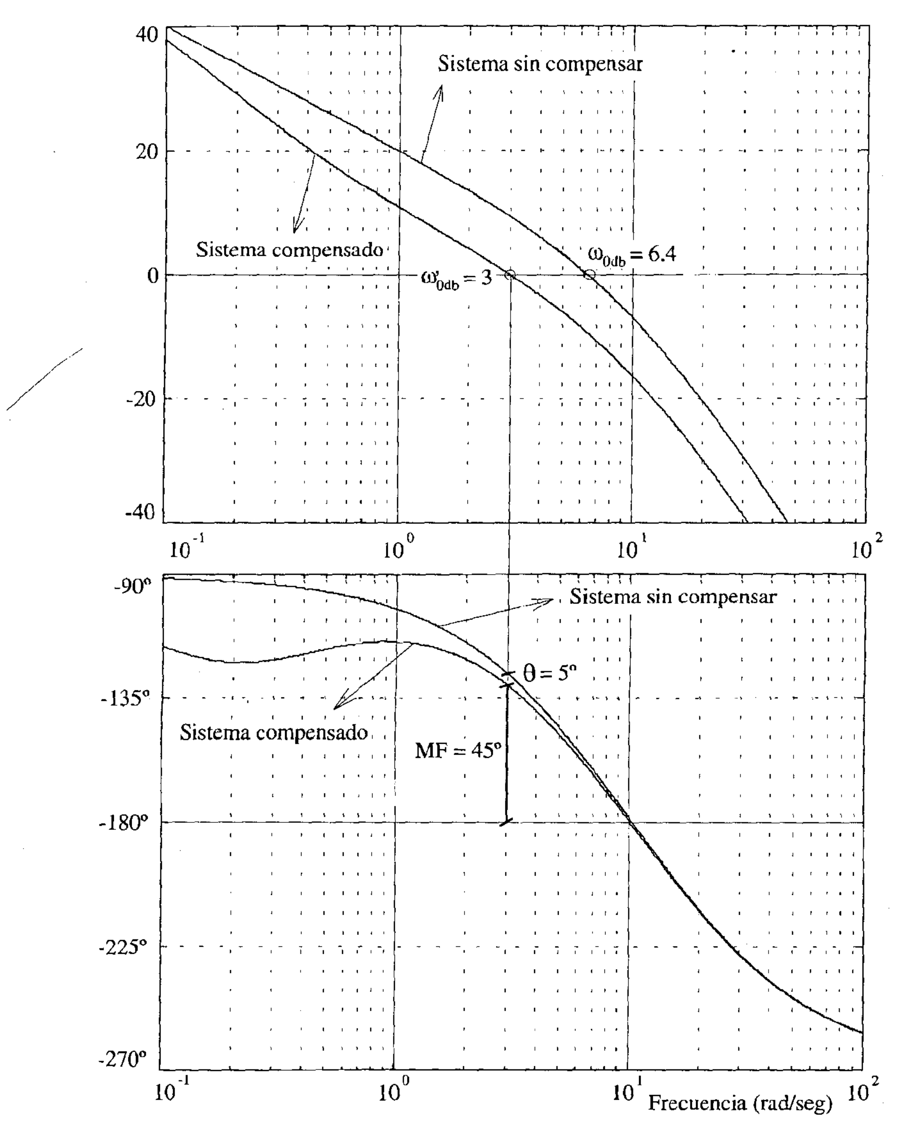


Fig. 5.28 Diagrama de Bode en módulo y fase para el sistema de la ec. (5.18) compensado en retraso de fase con el compensador de la ec. (5.56).

Despejando de esta ecuación y con la curva de módulo de la figura 5.10, se establece la cantidad de decibelios que el compensador en retraso debe atenuar :

$$\left|D(j\omega'_{0\,db})\right|_{db} = -\left|G_{LA}(j\omega'_{0\,db})\right|_{db} = -9.4 \text{ db}$$

Utilizando la ec. (5.54) se obtiene :

$$\left|D(j\omega'_{0\,db})\right|_{db} = 20\log\frac{1}{\beta} = -9.4 \text{ db} \qquad \Rightarrow \qquad \beta = 2.95$$

Con el dato de β la posición del polo es :

$$\omega_{polo} = \frac{1}{\beta T} = \frac{\omega_{cero}}{\beta} \cong 0.112 \text{ rad / seg}$$

La expresión final del compensador en retraso es :

$$D(s) = \frac{1}{2.95} \cdot \frac{s + 0.33}{s + 0.112} \tag{5.56}$$

En la respuesta frecuencial del sistema compensado, fig. 5.28, se observa como la frecuencia nueva de transición no es exactamente 3.3 rad/seg como se pretendía, lo que es debido a las aproximaciones realizadas y a las imprecisiones en la obtención de valores de la figura 5.10. No obstante, el margen de fase obtenido es de 45°, por lo que el diseño cumple con la especificación proporcionada.

La figura 5.29 muestra como la respuesta temporal del sistema compensado en retraso, C2(t), es más lenta que la respuesta del sistema sin compensar, C1(t), puesto que tiene una menor frecuencia de transición. En esta figura también se incluye la respuesta temporal del compensador en adelanto de la figura 5.25, C3(t), de forma que quede claro el efecto de ambos compensadores sobre la respuesta temporal del sistema.

En definitiva, el compensador en retraso mejora la estabilidad relativa del sistema, puesto que aumenta el margen de fase. Este compensador decrementa la frecuencia de transición, ralentizando la velocidad de respuesta del sistema.

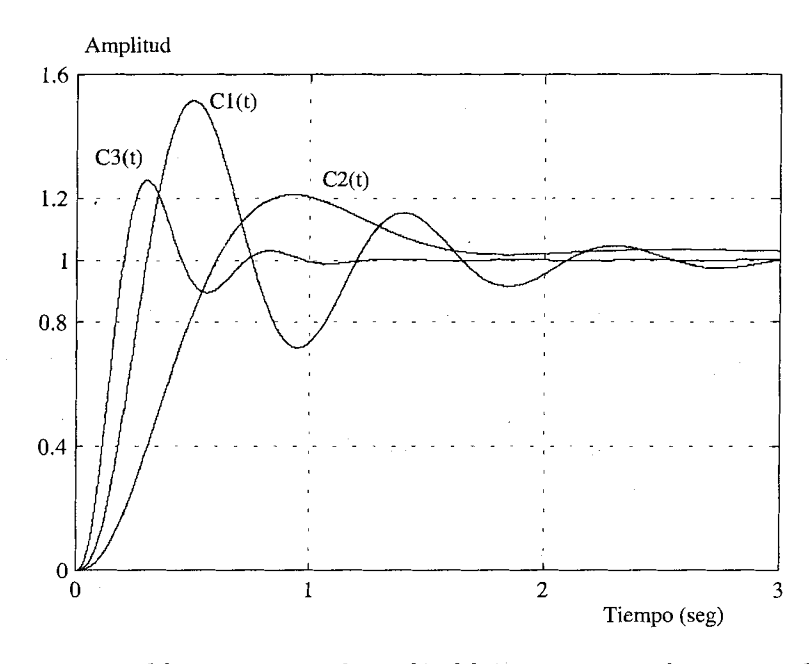


Fig. 5.29 Respuesta temporal frente a una entrada escalón del sistema compensado en retraso C2(t), del sistema sin compensar C1(t) y del sistema compensado en adelanto C3(t).

5.10 Aplicaci

Los compensa discretizados, r directa. Para e frecuencial, es compensar. En aplicación perm del círculo de ra

La transformada transferencia en equivalente del obtener la respue compensador fre inverso sobre la compensador y, proceso consiste

La aplicación de frecuenciales ya ganancia, permit sistema discreto.

Ejemplo 5.4

Se pretende dise para conseguir frecuencia de tr propósito de fij sistema debido a

R(

5.10 Aplicación discreta de compensadores frecuenciales

Los compensadores frecuenciales pueden aplicarse a sistemas discretos o que hayan sido discretizados, realizando las mismas técnicas de diseño expuestas en este capítulo de forma casi directa. Para ello, debido a que el diseño de los compensadores se ha basado en la respuesta frecuencial, es necesario conocer la respuesta frecuencial del sistema discreto que se pretende compensar. En este sentido, una herramienta imprescindible es la "transformada bilineal", cuya aplicación permite pasar el sistema discreto a un plano transformado w, mediante la transformación del círculo de radio unidad del plano z. La expresión de la transformada bilineal es:

$$W = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \tag{5.57}$$

La transformada bilineal debe aplicarse, como transformación o cambio de variable, a la función de transferencia en lazo abierto del sistema discreto, $G_{LA}(z)$, obteniendo, así, la expresión del equivalente del sistema discreto, $G_{LA}(w)$. Con esta función en lazo abierto transformada, se puede obtener la respuesta frecuencial del sistema discreto y, por tanto, sobre ésta, puede diseñarse cualquier compensador frecuencial. Una vez terminado el diseño del compensador sólo hay que hacer el paso inverso sobre la expresión obtenida del compensador, aplicando la transformada bilineal inversa al compensador y, en consecuencia, obteniendo su expresión discreta. La mejor manera de explicar este proceso consiste en llevar a cabo un ejemplos ilustrativo.

La aplicación de la transformada bilineal a un sistema discreto permitirá, además, utilizar los criterios frecuenciales ya conocidos sobre el sistema a compensar, como son el margen de fase y el margen de ganancia, permitiendo, de esta manera, tener también un grado indicativo de la estabilidad relativa del sistema discreto.

Ejemplo 5.4

Se pretende diseñar un compensador en adelanto de fase sobre el sistema discretizado de la figura 5.30 para conseguir un margen de fase de 60°. En este diseño se impone la restricción de que la nueva frecuencia de transición del sistema compensado no debe superar el valor límite de 2 rad/seg, con el propósito de fijar de esta manera una cota al ruido de alta frecuencia que podría introducirse en el sistema debido al efecto del compesador sobre éste.

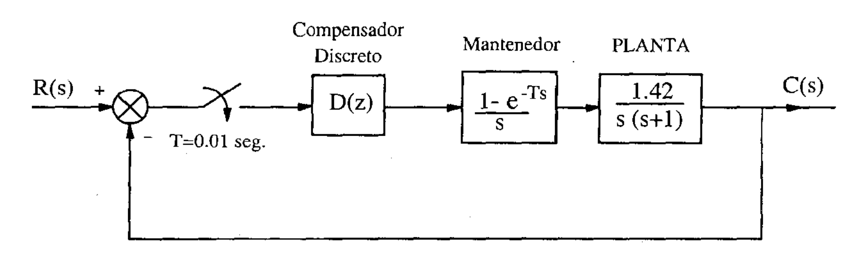


Fig. 5.30.

La función de transferencia discreta en lazo abierto de este sistema, para D(z)=1, es :

$$G(z) = TZ\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{1.42}{s\cdot(s+1)}\right\}_{T=0.01} = 7.076\cdot10^{-5}\,\frac{(z+0.996672)}{(z-1)(z-0.990049)} \qquad (5.58)$$

Sobre el sistema definido por (5.58) se debe aplicar la transformada bilineal, para obtener, entonces, la respuesta frecuencial de éste y poder diseñar el compensador en adelanto. Aplicando, por tanto, la transformada bilineal, se obtiene:

$$G(w) = G(z)\big|_{z=\frac{1-(T/2)w}{1+(T/2)w}} = -5.9166\cdot10^{-8}\,\frac{(w+120000)(w-200)}{w\cdot(w+1)} \qquad (5.59)$$

La respuesta frecuencial de (5.59) se muestra en la figura 5.31, donde se observa que la fase a la frecuencia de 1 rad/seg es de -135°, lo que supone que, inicialmente, el sistema tiene un margen de fase de 45°. Debido a que la nueva frecuencia de transición del sistema compensado no puede superar la frecuencia de 2 rad/seg, por el propósito de acotar el ruido de alta frecuencia como criterio de diseño, se puede tomar esta frecuencia como la nueva frecuencia de transición del sistema compensado, lo que supone que la fase del sistema a considerar en dicha frecuencia es de, aproximadamente a partir de la figura 5.31, -155°. Luego el compensador en adelanto, para conseguir un margen de fase de 60° a 2 rad/seg, deberá aportar en la curva de fase de la figura 5.31:

$$\phi = MF_d - (180° + \angle G(j2)) = 60° - (180° - 155°) = 35° \qquad (5.60)$$

Como la nueva frecuencia de transición en este ejemplo se ha fijado a 2 rad/seg, la forma de diseñar el compensador en adelanto expuesta en el apartado 5.8 de este capítulo no puede aplicarse, por lo que se diseñará el compensador para que cumpla las especificaciones realizadas.

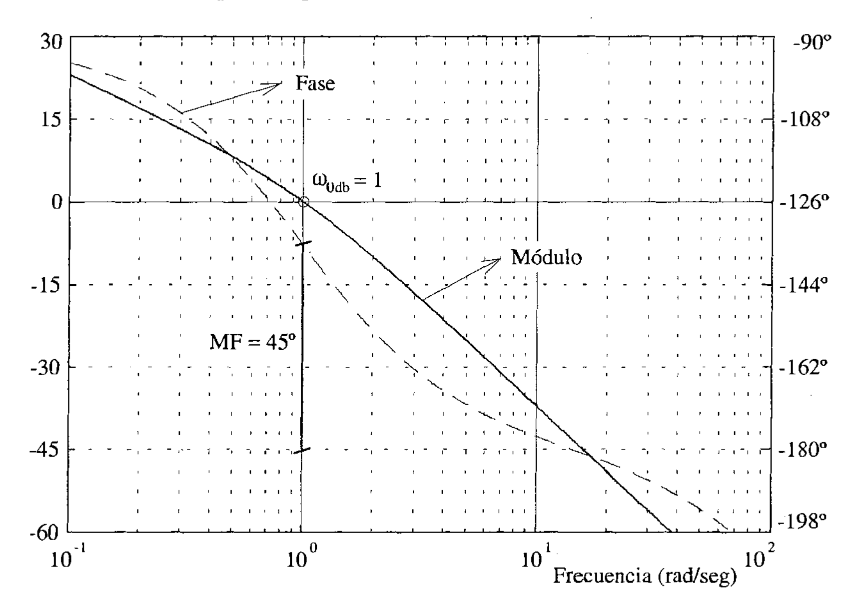
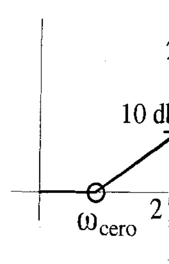


Fig. 5.31 Diagrama de Bode en módulo y fase para la función de transferencia definida en la ecuación (5.59).

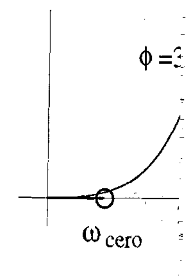
El primer paso
para que la nue
5.31, el compe
unos 10 db, es

Por lo que:

Teniendo en c
pendiente de 20



Con la posición
compensador en
frecuencia de tr
figura 5.33, y c
es :



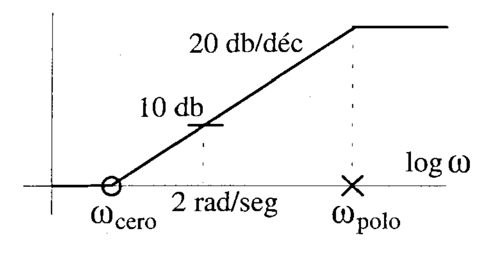
El diseño termin

El primer paso en el diseño consistirá en calcular la posición del cero del compensador en adelanto para que la nueva frecuencia de transición sea, en efectivo, 2 rad/seg. Para ello, observando la figura 5.31, el compensador en adelanto deberá subir la curva en módulo, a $\omega = 2$ rad/seg, aproximadamente unos 10 db, es decir, debe cumplirse que:

$$\left| G\left(jw'_{0\,db}\right)\right| + \left| G_a\left(jw'_{0\,db}\right)\right|_{w'_{0\,db}=2} = 0$$

Por lo que: $\left| G_a(j2)\right| = 10$ db

Teniendo en cuenta este dato, y sabiendo que el cero del compensador, fig. 5.32, introduce una pendiente de 20 db/déc, la posición del cero es :

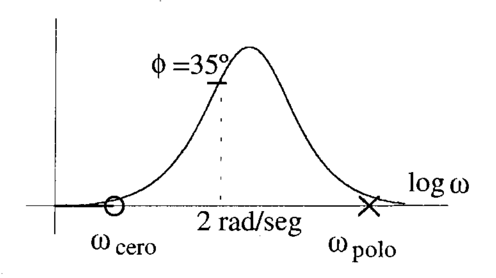


$$10 \text{ db} = 20(\log 2 - \log \omega_{cero})$$

$$\omega_{cero} = \frac{2}{10^{0.5}} = 0.6324 \text{ rad / seg}$$

Fig. 5.32

Con la posición del cero establecida, para concluir el diseño, falta por calcular la posición del polo del compensador en adelanto. Por tanto, sabiendo que el compensador debe añadir una fase de $\phi = 35°$ a la frecuencia de transición de 2 rad/seg, observando el efecto del compensador sobre la curva de fase, figura 5.33, y conociendo, pues, la posición del cero, el valor de la posición del polo del compensador es :



$$\phi = 35° = \text{arctg}\left(\frac{2}{\omega_{cero}}\right) - \text{arctg}\left(\frac{2}{\omega_{polo}}\right) \qquad (5.61)$$

$$\omega_{polo} = \frac{2}{\text{tg}\left(\text{arctg}\left(\frac{2}{0.63}\right) - 35\right)} = 2.61 \text{ rad / seg}$$

Fig. 5.33.

El diseño termina planteando la expresión del compensador en adelanto, que es:

$$G_a(jw) = \frac{\frac{w}{0.63} + 1}{\frac{w}{2.61} + 1} \qquad (5.62)$$

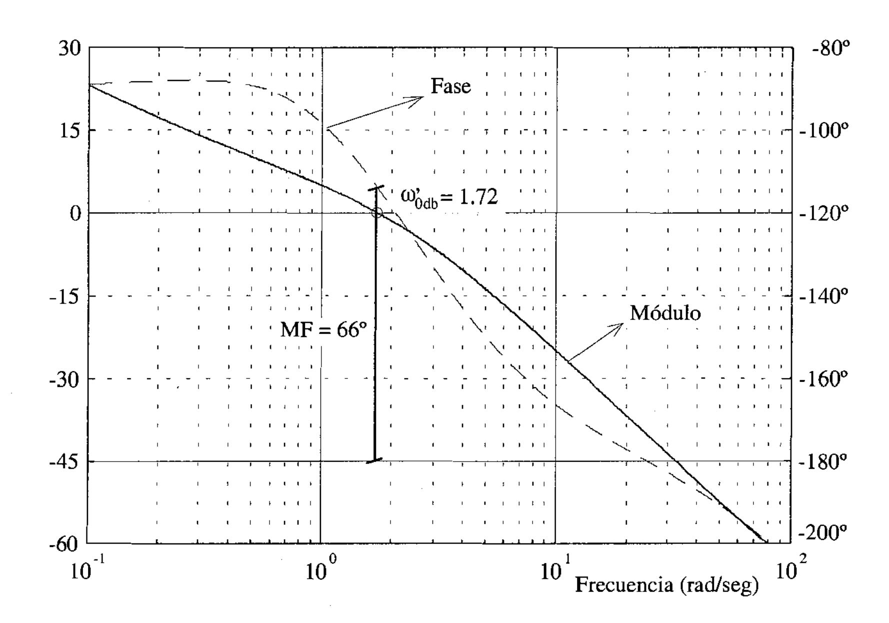


Fig. 5.34 Diagrama de Bode en módulo y fase para el sistema definido en (5.59) con la compensación en adelanto (5.62).

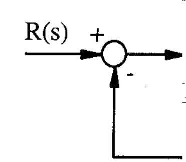
En la respuesta frecuencial del sistema compensado, fig. 5.34, se observa como el margen de fase obtenido mediante compensación es de 66°, por lo que se supera la especificación efectuada. No obstante, se observa que la nueva frecuencia de transición es de 1.72 rad/seg en lugar de 2 rad/seg, lo que es debido a que la posición del polo del compensador en adelanto, 2.61 rad/seg, está cerca del valor especificado de 2 rad/seg, afectando este polo a la curva de módulo en unos pocos db. Este resultado es aceptable, pues se pretendía que la nueva frecuencia de transición quedase acotada, para evitar el ruido de alta frecuencia.

Aplicando la transformada bilineal inversa a (5.62), se obtiene la expresión discreta del compensador en adelanto:

$$G_a(z) = G_a(jw)\Big|_{w=\frac{2}{T}\frac{1-z}{1+z}} = 4.1023 \cdot \frac{z - 0.9937}{z - 0.9742}$$

La respuesta temporal del sistema discretizado sin compensar, C1(t), y del sistema discretizado compensado en adelanto de fase, C2(t), se muestran en la figura 5.35.

Tal y como se ha mostrado en este ejemplo, cualquier compensador frecuencial puede aplicarse a sistemas discretos mediante la aplicación adecuada de la transformada bilineal, hecho que permite obtener la respuesta frecuencial del sistema discreto, el diseño del compensador en el dominio frecuencial y la expresión discreta del compensador empleado. La transformada bilineal, pues, es una herramienta sumamente útil, ya que posibilita el uso de las misma técnicas y conceptos adquiridos en el diseño de compensadores frecuenciales sobre sistemas discretos.



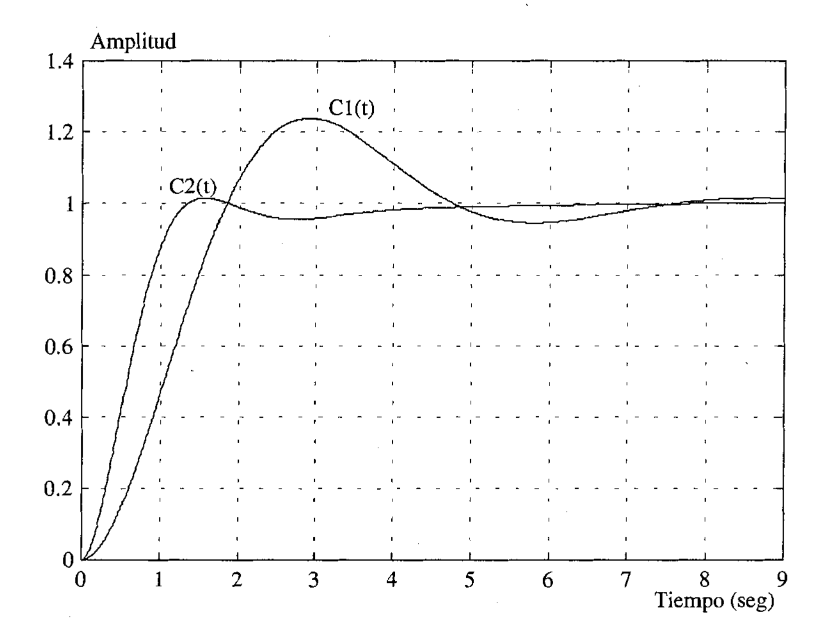


Fig. 5.35 Respuesta temporal frente a una entrada escalón para el sistema definido en (5.58) sin compensar, C1(t), y para el mismo sistema compensado en adelanto, C2(t).

5.11 Problemas

Problema 1

Dado el sistema de la figura :

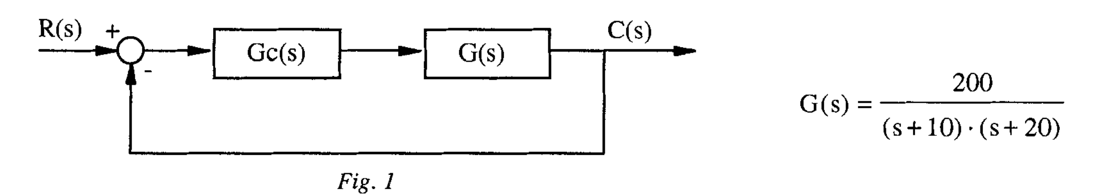


Fig. 1

$$G(s) = \frac{200}{(s+10)\cdot(s+20)}$$

donde: G(s) es la planta y Gc(s) es el control, se requiere que dicho sistema cumpla las siguientes especificaciones:

- Error estático de posición nulo.
- Error estático de velocidad del 2 % .
- Margen de Fase: $MF_d = 25^o$.

* Control proporcional (P) : Gc(s) = k.

a) Razonar y comprobar analíticamente que con un control proporcional no se cumple la primera especificación.

* Control integral (I) : $\qquad Gc(s) = k/s.$

b) Razonar y comprobar analíticamente que se cumple la primera especificación con este control.

c) Calcular k para cumplir la segunda especificación.

d)¿Qué margen de fase del sistema se obtiene con este control?. ¿Se cumple la tercera especificación? Indicar la estabilidad absoluta del sistema.

* Control proporcional-integral (PI) : $\qquad Gc(s) = kp + \dfrac{ki}{s} = k \cdot \dfrac{\left(s/\omega_o + 1\right)}{s}$

Fijar k al mismo valor que el apartado anterior para lograr el estado estacionario deseado.

e) Suponiendo que el remanente de fase introducido por el control en la nueva frecuencia de transición es de 10°, calcular el valor de ω_o para obtener el margen de fase deseado.

f) Comprobar si se cumple la hipótesis realizada de un remanente de fase de 10° en la frecuencia de transición del sistema compensado.

Solución:

a) Debido a que en la función de transferencia en lazo abierto no existe ningún elemento integrador, el error estacionario a una entrada escalón no será nulo.

$$e_{ssp} = \frac{1}{1+kp} \quad \Rightarrow \quad kp = \lim_{s\to 0} G_{LA}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{200 \cdot k}{(s+10)\cdot(s+20)} = k$$

b) El control integral introduce un elemento integrador que hace que el error estacionario sea nulo:

$$e_{ssp} = \frac{1}{1+kp} \quad \Rightarrow \quad kp = \lim_{s\to 0} G_{LA}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{200 \cdot k}{s\cdot(s+10)\cdot(s+20)} \to \infty \quad \Rightarrow \quad e_{ssp} = 0$$

c) Cálculo de k para tener un error estático de velocidad del 2 % :

$$e_{ssv} = \frac{1}{kv} = 0.02 \quad \Rightarrow \quad kv = \lim_{s\to 0} s \cdot G_{LA}(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{200 \cdot k}{s\cdot(s+10)\cdot(s+20)} = 50 \quad \Rightarrow \quad k = 50$$

d) De este modo la función de transferencia en lazo abierto del sistema resulta:

$$G_{LA}(s) = \frac{50}{s\cdot(0.1s+1)\cdot(0.05s+1)}$$

* Cálculo de la frecuencia de transición: la respuesta frecuencial de este sistema:

$$\left|G_{LA}(j\omega)\right|_{db} = 20 \log 50 - 20 \log \omega - 20 \log\left|\frac{j\omega}{10}+1\right| - 20 \log\left|\frac{j\omega}{20}+1\right|$$

$$\text{FASE}[G_{LA}(j\omega)] = -90^\circ - \text{arctg}\frac{\omega}{10} - \text{arctg}\frac{\omega}{20}$$

De este modo, a partir del diagrama de Bode se puede calcular :

$$20\log 50 - |G_{LA}(j\omega)|_{db\,\omega=10} = 20\log 10 \quad \Rightarrow \quad |G_{LA}(j\omega)|_{db\,\omega=10} = 14\text{ db}$$

$$14\text{ db} - |G_{LA}(j\omega)|_{db\,\omega=20} = 40\log\frac{20}{10} \quad \Rightarrow \quad |G_{LA}(j\omega)|_{db\,\omega=20} = 2\text{ db}$$

$$2\text{ db} - 0\text{ db} = 60\log\frac{\omega_{to}}{20} \quad \Rightarrow \quad \omega_{to} = 21.6\text{ rad / seg}$$

* Cálculo del margen de fase:

$$\text{FASE}[G_{LA}(j\omega_{to})] = -90^\circ - \text{arctg}\frac{\omega_{to}}{10} - \text{arctg}\frac{\omega_{to}}{20} \quad \Rightarrow \quad MFo = 180^\circ + \text{FASE}[G_{LA}(j\omega_{to})] = -22.36^\circ$$

El margen de fase del sistema resulta negativo, por lo que el sistema es inestable.

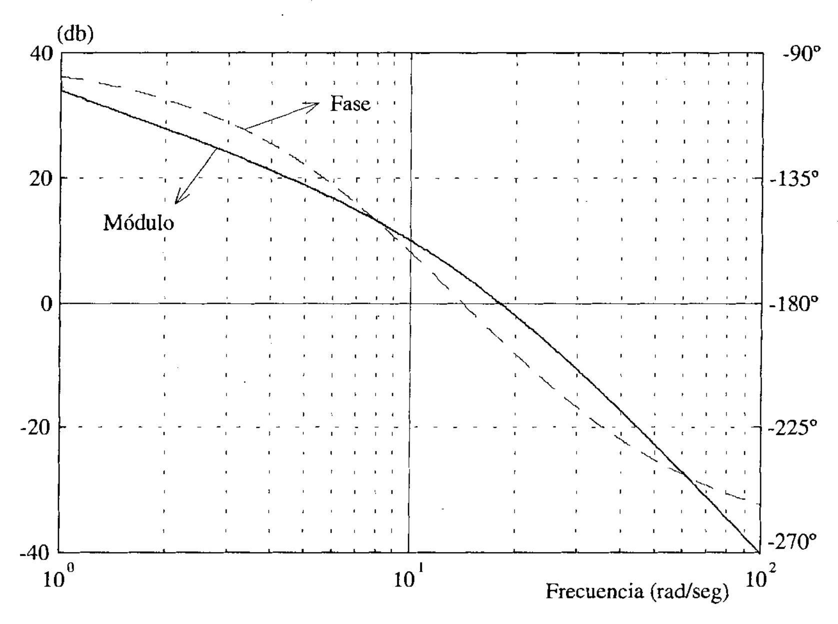


Fig. 2 Diagrama de Bode de la planta con control integral para k=50.

e) Diseño control proporcional-integral (PI) :

La nueva frecuencia de transición del sistema compensado verifica :

$$180^\circ + \text{FASE}[G(j\omega_t)] + \text{FASE}[Gc(j\omega_t)] = MFd \quad \Rightarrow \quad \text{FASE}[G(j\omega_t)] = -180^\circ + 10^\circ + 25^\circ = -145^\circ$$

La expresión de la fase de la planta es:

$$\text{FASE}[G_{LA}(j\omega_t)] = -\text{arctg}\frac{\omega_t}{10} - \text{arctg}\frac{\omega_t}{20} \quad \Rightarrow \quad \omega_t \cong 47 \text{ rad / seg}$$

Para imponer que sea efectivamente la frecuencia de transición se debe cumplir:

$$|G(j\omega_t)|_{db} + |Gc(j\omega_t)|_{db} = 0\text{dB}$$

A partir del diagrama de Bode:

$$28 \text{ db} - |G(j\omega_t)|_{db} = 40\log\frac{47}{20} \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega_t)|_{db} = 13.16 \text{ db} \quad \Rightarrow \quad |Gc(j\omega_t)|_{db} = -13.16 \text{ db}$$

Cálculo de la posición del cero del control :

$$0 \text{ db} - (-13.16 \text{ db}) = 20\log\omega_o \quad \Rightarrow \quad \omega_o = 4.55 \text{ rad / seg}$$

$$Gc(s) = 50\cdot\frac{\left(s/4.55 + 1\right)}{s}$$

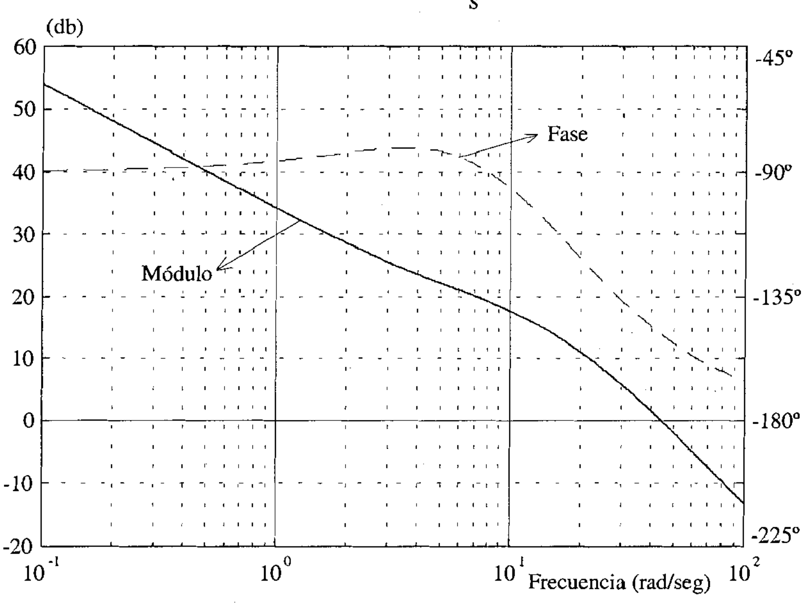


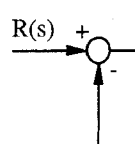
Fig. 3 Diagrama de Bode del sistema compensado con un PI.

f) Para que los cálculos efectuados sean válidos se debe garantizar que la fase del control en la frecuencia de transición sea mayor que -10°.

$$\text{FASE}[Gc(j\omega_t)] = -90^\circ - \text{arctg}\frac{\omega_t}{\omega_o} = -90 - \text{arctg}\frac{47}{4.55} \cong 5.53^\circ$$

Problema 2

Dadas las si
negativa unita



El valor de k
redes de com
retardo de fas
compensación
el valor de k
compensación

Solución :

a) Con $G_1(s)$
de -180°. Y la

Luego la frecu

verificándose
valor de k; en

b) La función
ofrece el sigui

MF

luego:

Problema 2

Dadas las siguientes funciones de transferencia en lazo abierto de sistemas con realimentación negativa unitaria, tal como el que se muestra en la figura :

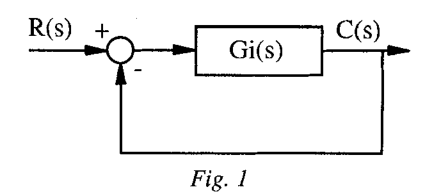


Fig. 1

a) $G_1(s) = \dfrac{k}{s^2}$; b) $G_2(s) = \dfrac{k}{s^2 \cdot (s+1)}$

c) $G_3(s) = \dfrac{k}{s \cdot (s+1) \cdot (s+0.5)}$; d) $G_4(s) = \dfrac{k}{s^3}$

El valor de k puede ajustarse en un margen de valores comprendidos entre 0.1<k<10. Se dispone de redes de compensación para estabilizar el sistema, en el caso de que lo precisen, en adelanto y en retardo de fase, estando en ambos casos el polo y el cero espaciados una década. Diseñar la red de compensación más adecuada en cada uno de los casos para lograr un margen de fase ≥ 30°, obteniendo el valor de k máximo (dentro de los límites preestablecidos) para el cual puede realizarse dicha compensación. Determinar la frecuencia de transición del sistema compensado.

Solución :

a) Con $G_1(s)$ no es posible realizar una compensación en retardo de fase porque la fase de la planta es de -180°. Y la fase que introducirá un compensador en adelanto de fase es :

$$\phi_m = \arcsin\left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right] = \arcsin\left[\frac{1-0.1}{1+0.1}\right] = 54.9^o$$

Luego la frecuencia de transición :

$$|G_1(j\omega_t)| + 20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 0 \text{ db} \quad \Rightarrow \quad |G_1(j\omega_t)| = -10 \text{ db}$$

verificándose -180° + 54.9° > -180° + 30°, con lo cual el sistema queda compensado para cualquier valor de k; en concreto los valores de k y T deben validar la ecuación:

$$-40\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}T} + 20\log k = -10 \text{ db}$$

b) La función $G_2(s)$ no es compensable en retardo de fase. La compensación en adelanto de fase ofrece el siguiente resultado :

$$MF_o = MF_d - \phi_m + \varphi = 30^o - 54.9^o + 5^o = -19.9^o \quad \Rightarrow \quad \angle G_2(j\omega_{to}) = -199.9^o$$

luego: $-180^o - \text{arctg}\,\omega_{to} = -199.9^o \quad \Rightarrow \quad \omega_{to} = 0.362$

Asintóticamente el valor de k es: $20\log k - 40\log 0.362 = 0 \text{ db} \Rightarrow k = 0.131$, que es el valor de k máximo para el que se puede realizar la compensación.

La frecuencia de transición resulta:

$$|G_2(j\omega_t)| + 20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 0 \text{ db} \Rightarrow |G_2(j\omega_t)| = -10 \text{ db}$$

$$-40\log\omega_t + 20\log k = -10 \text{ db} \Rightarrow \omega_t = \omega_m = 0.643 \Rightarrow T = 4.918$$

c) La función $G_3(s)$ se puede compensar en adelanto y en retardo de fase :

- Compensación en adelanto de fase:

Siguiendo pasos análogos al caso anterior se obtienen los resultados siguientes :

$$MF_o = MF_d - \phi_m + \varphi = 30^\circ - 54.9^\circ + 12^\circ = -12.9^\circ \Rightarrow \angle G_2(j\omega_{to}) = -192.9^\circ$$

luego : $$-90^\circ - \text{arctg}\,\omega_{to} - \text{arctg}\,2\omega_{to} = -192.9^\circ \Rightarrow \omega_{to} = 0.9$$

Asintóticamente el valor de k es: $20\log 2k - 40\log\frac{0.9}{0.5} = -6 \text{ db} \Rightarrow k = 0.8119$, que es el valor de k máximo para el que se puede realizar la compensación.

La frecuencia de transición resulta:

$$|G_3(j\omega_t)| + 20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 0 \text{ db} \Rightarrow |G_3(j\omega_t)| = -10 \text{ db}$$

$$20\log 2k + 6 \text{ db} - |G_3(j\omega)|_{\omega=1} = 40\log\frac{1}{0.5} \Rightarrow |G_3(j\omega)|_{\omega=1} = -1.7893$$

$$-60\log\omega_t = 10 \text{ db} - 1.7893 \text{ db} \Rightarrow \omega_t = \omega_m = 1.37 \Rightarrow T = 2.3082$$

- Compensación en retardo de fase:

$$\angle G_3(j\omega_t) = -180^\circ + MFd + \theta = -180^\circ + 30^\circ + 5^\circ = -145^\circ$$

luego : $$-90^\circ - \text{arctg}\,\omega_t - \text{arctg}\,2\omega_t = -145^\circ \Rightarrow \omega_t = 0.36$$

Por criterio : $$\omega_c = \frac{1}{T} = \frac{\omega_t}{10} \Rightarrow T = 27.77$$

$$|G_3(j\omega_t)| + 20\log\frac{1}{\beta} = 0 \text{ db} \Rightarrow |G_3(j\omega_t)| = 20 \text{ db}$$

$$20 \text{ db} - (20\log k + 6 \text{ db}) = 20\log\frac{0.5}{0.36} \Rightarrow k = 3.6085$$

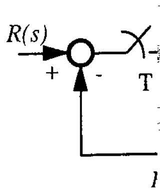
d) El sistema G
de fase.

Problema 3

Se desea dise
especificacione

1. Errc

2. Mar



a) Calcular k p

b) Deducir el
calculada en el
de 0.8 seg. a ur

c) Calcular el r

Sabiendo que l

d) Calcular el r

e) Diseñar el c
para obtener ur

Solución :

a) Cálculo de l

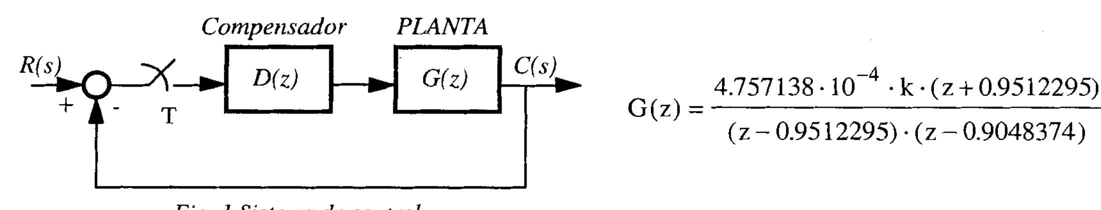
b) Cálculo del

d) El sistema $G_4(s)$ tiene una fase de -270°, por lo que no es compensable ni en retardo ni en adelanto de fase.

Problema 3

Se desea diseñar el compensador del sistema de la figura para satisfacer las siguientes especificaciones:

1. Error estático de posición del 5 %.
2. Margen de fase: MFd=45°.



$$G(z) = \frac{4.757138 \cdot 10^{-4} \cdot k \cdot (z+0.9512295)}{(z-0.9512295)\cdot(z-0.9048374)}$$

Fig. 1 Sistema de control.

a) Calcular k para obtener un error estático de posición del 5 %.

b) Deducir el periodo de muestreo sabiendo que el sistema sin compensador (D(z)=1), y con la k calculada en el apartado anterior, presenta una respuesta transitoria con un tiempo de establecimiento de 0.8 seg. a una entrada escalón.

c) Calcular el número de muestras por ciclo de la respuesta transitoria a una entrada escalón (D(z)=1).

Sabiendo que la transformada bilineal de la planta resulta:

$$G(w) = \frac{-5.94 \cdot 10^{-4} \cdot (w+8001.667)\cdot(w-200)}{(w+5)\cdot(w+10)}$$

d) Calcular el margen de fase y la frecuencia de transición del sistema sin compensar.

e) Diseñar el compensador (D(z)) mediante el método que proporcione mayor frecuencia de transición para obtener un margen de fase de 45°.

Solución :

a) Cálculo de k para tener e_{ssp}=5 %.

$$kp = \frac{1-e_{ssp}}{e_{ssp}} = 19; \qquad kp = \lim_{z\to 1} G(z) = 19 \quad \Rightarrow \quad k = 95$$

b) Cálculo del periodo de muestreo.

Puesto que con D(z)=1 y k=95 la respuesta transitoria al escalón de entrada tiene ts=0.8 seg.

$$ts = \frac{4}{\sigma} = 0.8 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 5$$

Por otra parte, los polos en lazo cerrado en plano Z se encuentran en:

$$1 + \frac{4.757138 \cdot 10^{-4} \cdot k \cdot (z + 0.9512295)}{(z - 0.9512295) \cdot (z - 0.9048374)} = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 1.8109 \cdot z + 0.9037 = 0$$

$$\Rightarrow \quad z_{1,2} = 0.90545 \pm j \cdot 0.2895864$$

Transformación del plano Z al plano S:

$$z = e^{Ts} = e^{-\sigma T} \cdot [\cos(\omega_d T) + j \cdot \text{sen}(\omega_d T)] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e^{-\sigma T} \cdot \cos(\omega_d T) = 0.90545 \\ e^{-\sigma T} \cdot \text{sen}(\omega_d T) = 0.2895864 \end{cases}$$

$$e^{-\sigma T} = \sqrt{(0.90545)^2 + (0.2895864)^2} \quad \Rightarrow \quad T = 0.01$$

c) Cálculo del número de muestras por ciclo:

$$tg(\omega_d T) = \frac{0.2895864}{0.90545} \quad \Rightarrow \quad \omega_d T = 0.309551 \quad \Rightarrow \quad \omega_d = 30.955 \text{ rad / seg.}$$

$$\frac{\omega_s}{\omega_d} = \frac{2\pi / T}{\omega_d} = 20.3 \text{ muestras por ciclo.}$$

d) Conociendo la transformada bilineal de la planta se puede calcular el margen de fase y la frecuencia de transición del sistema sin compensar. Normalizando:

$$G(w) = \frac{19 \cdot \left(\frac{w}{8001.667} + 1\right) \cdot \left(1 - \frac{w}{200}\right)}{\left(\frac{w}{5} + 1\right) \cdot \left(\frac{w}{10} + 1\right)}$$

Frecuencia de transición:

$$|G(j\omega_w)|_{db} = 20\log 19 - 20\log\frac{10}{5} = 19.575 \text{ db} \quad \Rightarrow \quad 19.575 \text{ db} - 40\log\frac{\omega_{wto}}{10} = 0 \text{ db} \quad \Rightarrow \quad \omega_{wto} = 30.858$$

Margen de fase:

$$\text{FASE}[G(j\omega_{wto})] = -\text{arctg}\frac{\omega_{wto}}{5} - \text{arctg}\frac{\omega_{wto}}{10} - \text{arctg}\frac{\omega_{wto}}{200} = -161.6^{\circ}$$

$$MF_o = 180^{\circ} + \text{FASE}[G(j\omega_{wto})] = 18.4^{\circ}$$

donde no se ha considerado el efecto en fase del cero en ω_w=8001.667.

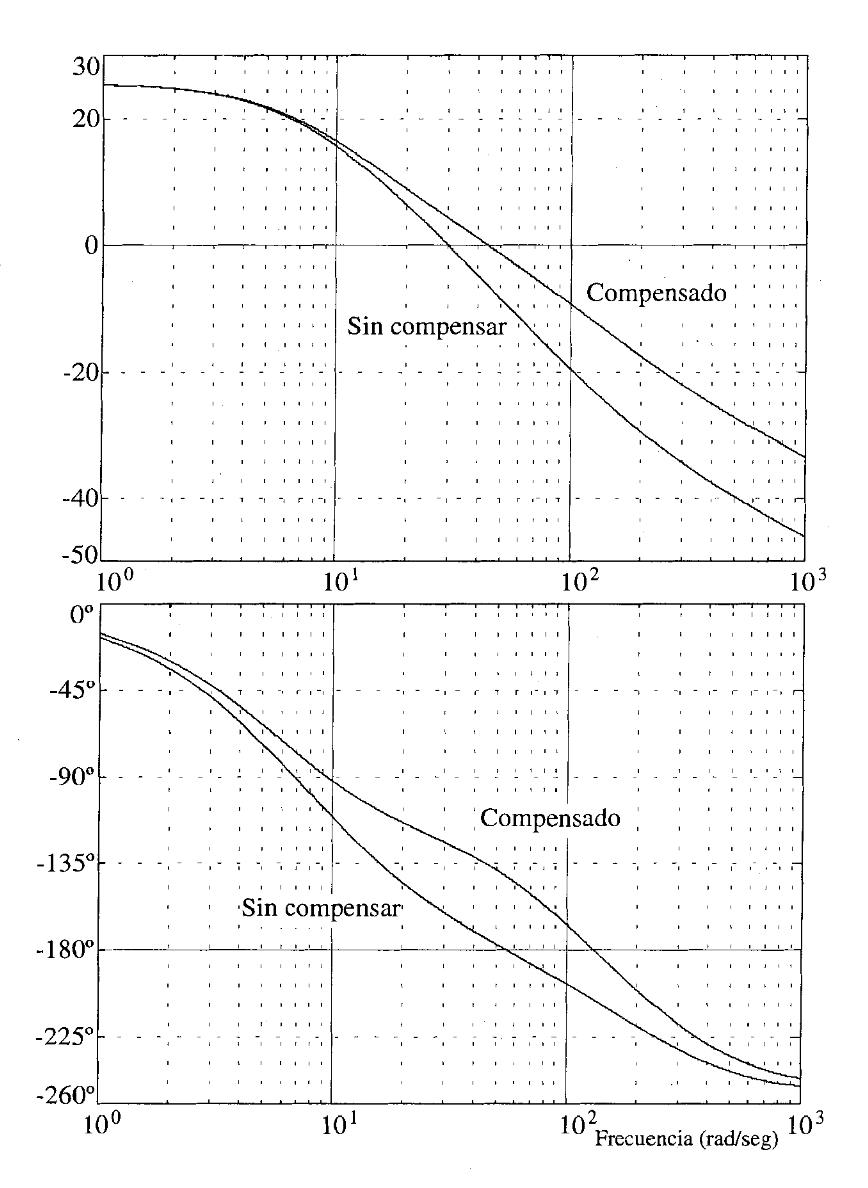


Fig. 2 Diagrama de Bode del sistema compensado.

e) El método que proporciona mayor frecuencia de transición es el de compensación en adelanto. Desfase máximo a introducir por el compensador :

$$\phi_m = MF_d - MF_o + 12^\circ = 45^\circ - 18.4^\circ + 12^\circ = 38.6^\circ \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.2315$$

Nueva frecuencia de transición : $20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + |G(j\omega_{wt})|_{db} = 0 \text{ db} \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega_{wt})|_{db} = -6.3542 \text{ db}$

$$19.575\text{dB} + 6.3542\ \text{db} = 40\log\frac{\omega_{wt}}{10} \quad\Rightarrow\quad \omega_{wt} = 44.4\ \text{rad/seg}; \quad \omega_{wt} = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{T} = 21.36$$

Compensador :

$$D(z) = 4.32\cdot\frac{w+21.36}{w+92.26} \quad\Rightarrow\quad D(z) = 4.32\cdot\frac{200\cdot\dfrac{z-1}{z+1}+21.36}{200\cdot\dfrac{z-1}{z+1}+92.26} = 4.32\cdot\frac{221.36\cdot z - 178.64}{292.26\cdot z - 107.74}$$

Problema 4

El diseño de sistemas de control con realimentación en la industria se realiza empleando en más ocasiones los métodos de respuesta frecuencial que cualquier otro método. La razón principal es la facilidad con que se puede usar la información experimental para propósitos de diseño.

De un sistema industrial únicamente se conoce su respuesta frecuencial a través de medidas experimentales; esta respuesta frecuencial se representa en el diagrama de Bode de la figura siguiente:

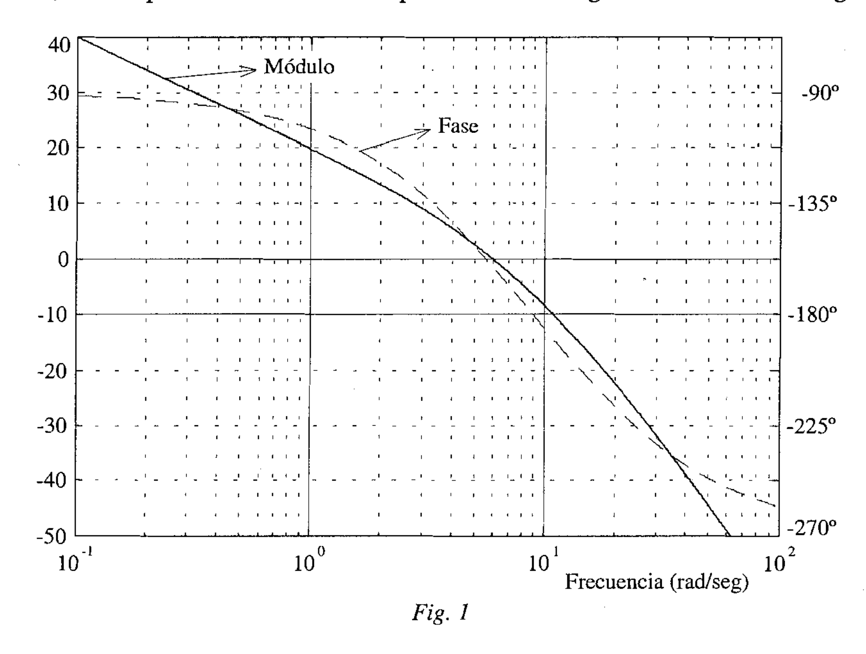


Fig. 1

Para reducir la sensibilidad de este proceso industrial, se considera el sistema realimentado siguiente:

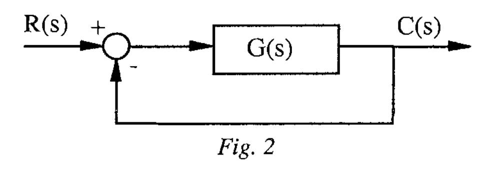


Fig. 2

Se desea controlar este sistema para lograr cumplir las siguientes especificaciones:

1. Error estacionario de velocidad $\leq$ 20 %.
2. Margen de Fase de 45°.

A partir de respuesta frecuencial de G(s):

a) Indicar el valor del error estacionario de posición. Razonar la respuesta.

b) Comprobar que se cumple la condición de error estacionario de velocidad sabiendo que la fase de G(jω) permanece valiendo -90° al disminuir la frecuencia por debajo de ω= 0.1 rad/seg.

Nota: Descomponer la función de transferencia como:

$$\frac{A(s)}{B(s)} = K \cdot s^{-j} \cdot \frac{\left(1+ {}^{s}\!/_{a_1}\right) \cdots \left(1+ {}^{s}\!/_{a_n}\right)}{\left(1+ {}^{s}\!/_{b_1}\right) \cdots \left(1+ {}^{s}\!/_{b_m}\right)}$$

c) Obtener gráficamente el margen de fase del sistema.

Dado que el margen de fase es menor que el margen de fase deseado se plantea una compensación en serie:

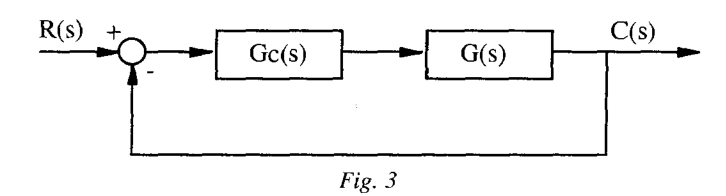


Fig. 3

d) Diseñar el compensador en retardo de fase para lograr el margen de fase deseado. (considérese un remanente de fase introducido por el compensador de 5° en la frecuencia de transición).

e) Diseñar el compensador en adelanto de fase para lograr el margen de fase deseado.

El estudio de sistema de control en el dominio frecuencial permite interpretar fácilmente la sensibilidad del error estacionario respecto variaciones de parámetros del sistema. En concreto se demuestra que el diseño para errores en estado estacionario aceptables, se puede considerar como la colocación de un límite inferior en una ganancia de frecuencia baja del sistema.

Por otra parte se deben considerar los efectos de ruidos y resonancias a alta frecuencia, para evitarlos se debe mantener baja la ganancia a altas frecuencias. Por ello se consideran dos nuevas especificaciones :

* Se deben reproducir (en lazo cerrado) entradas sinusoidales de hasta 1 rad/seg con un error de amplitud $\leq$ 12.5 % respecto a la amplitud de la señal de entrada.

* Se deben atenuar (en lazo cerrado) entradas sinusoidales mayores a 30 rad/seg en la salida de una amplitud $\leq$ 5 % de sus valores de amplitud de entrada.

Una condición "suficiente" para cumplir las especificaciones con respecto a las entradas senoidales es que la gráfica de módulo caiga fuera de las regiones sombreadas de la figura siguiente:

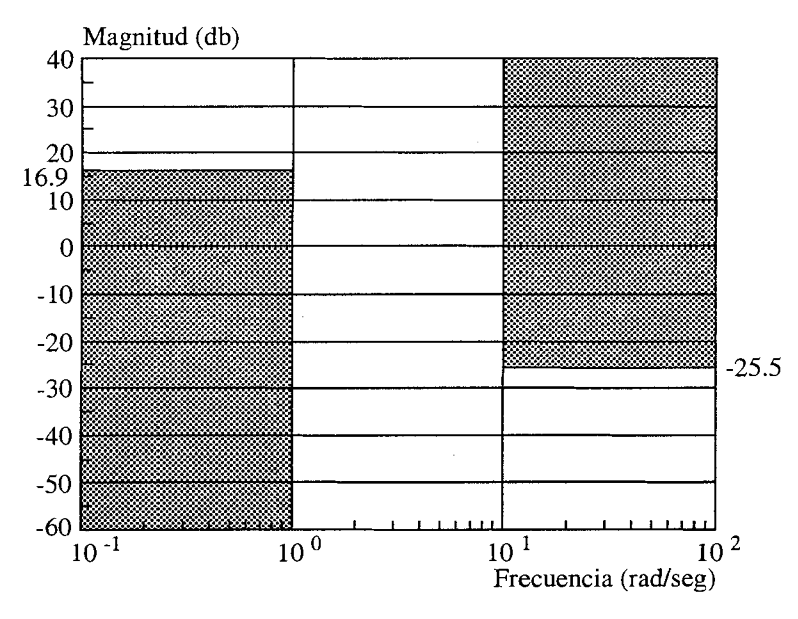


Fig. 4

f) Comprobar que el sistema compensado en retardo de fase no cumple con alguna de estas especificaciones. Razonar la respuesta.

g) Comprobar que el sistema compensado en adelanto de fase no cumple con alguna de estas especificaciones. Razonar la respuesta.

h) Diseñar el compensador en retardo de fase que permite obtener el mayor margen de fase posible cumpliendo estas especificaciones. (Considérese un remanente de fase introducido por el compensador de 5° en la frecuencia de transición).

i) Diseñar el compensador en adelanto de fase que permite obtener el mayor margen de fase posible cumpliendo estas especificaciones.

Solución :

a) Error estacionario de posición : mediante la respuesta frecuencial se observa que la fase de G(jω) es de -90° para $\omega < 0.1$ rad/seg, lo cual implica que la función de transferencia del sistema en lazo abierto tiene un polo en origen que dará un carácter integrativo al sistema, responsable de la anulación del error estacionario de posición.

Polo en origen $\Rightarrow$ $k_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \infty$ $\Rightarrow$ $e_{ssp} = \dfrac{1}{1+k_p} = 0$

b) Error estacionario de velocidad: la expresión del error estacionario de velocidad viene dada por:

$$e_{ssv} = \frac{1}{k_v} \quad \Rightarrow \quad k_v = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{A(s)}{B(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{A(s)}{B(s)}$$

$$k_v = \lim_{s\to 0} \frac{A(s)}{B(s)} = \lim_{s\to 0} K \cdot \frac{\left(1+\frac{s}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{a_n}\right)}{\left(1+\frac{s}{b_1}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{b_m}\right)} = K$$

Como no hay ninguna singularidad por debajo de 1 rad/seg, resultará que, asintóticamente, la ganancia en ω=1 será:

$$\left|G(j\omega)\right|_{db,\ \omega=1} = 20 \log K = 20 \text{ db} \quad \Rightarrow \quad K = 10$$

Nos ofrecen la curva real; así pues, se debe verificar que la hipótesis asintótica se verifica. Para ello únicamente se ha de observar que entre ω=0.1 rad/seg y ω=1 rad/seg hay efectivamente una diferencia de 20 db's; de este modo se verifica que la aproximación realizada es correcta.

El error estacionario de velocidad cometido será:

$$k_v = K = 10 \quad \Rightarrow \quad e_{ssv} = \frac{1}{k_v} = 10\ \% < 20\ \%$$

Con lo cual se verifica el cumplimiento de la especificación de error estacionario.

c) Para obtener gráficamente el margen de fase del sistema se debe observar previamente la frecuencia de transición de la curva real de módulo del sistema en lazo abierto. Esto sucede para $\omega_{to} \cong 6$ rad / seg y la fase obtenida es: $\text{FASE}[G(j\omega_{to})] \cong -162^\circ$.

Margen de fase: $MF_0 = 180^\circ + \text{FASE}[G(j\omega_{to})] = 18^\circ$

d) Se debe diseñar el compensador en retardo de fase para lograr el margen de fase deseado de 45°, por lo que en primer lugar se ha de calcular el valor de la frecuencia de transición del sistema compensado (ω_t). Para esta frecuencia se cumplirá :

$$\text{FASE}[G(j\omega_t)] = -180^\circ + MF_d + 5^\circ = -180^\circ + 45^\circ + 5^\circ = -130^\circ$$

donde se ha considerado un remanente de fase, introducido por el compensador, de 5°.

Gráficamente se obtiene que para -130° la frecuencia es : $\omega_t \cong 3$ rad/seg.

Para esta frecuencia se debe cumplir: $\left|G(j\omega_t)\right|_{db} + \left|Gc(j\omega_t)\right|_{db} = 0$ db .

Gráficamente: $\left|G(j\omega_t)\right|_{db} \cong 9$ db

$$9\text{ db} + \left|Gc(j\omega_t)\right|_{db} = 0\text{ db}; \qquad 20\log\frac{1}{\beta} = -9\text{ db} \quad \Rightarrow \quad \beta = 2.81838$$

Por criterio, se debe situar el cero del compensador una década por debajo de la frecuencia de transición, pues se ha considerado un remanente de fase de 5°.

$$\omega c = \frac{1}{T} = \frac{\omega t}{10} = 0.3\text{ rad / seg}; \qquad \omega p = \frac{1}{\beta T} = 0.1066$$

Compensador de retardo:
$$Gc(s) = \frac{1+\dfrac{s}{0.3}}{1+\dfrac{s}{0.1066}} = \frac{1}{2.81838}\cdot\frac{s+0.3}{s+0.1066}$$

e) Diseño del compensador en adelanto de fase para lograr el margen de fase deseado : se debe calcular en primer lugar cuál es el desfase a introducir por el compensador en adelanto. Para ello se considera una variación de fase del sistema en lazo abierto de, aproximadamente, 12° al aumentar la frecuencia de transición del sistema por efecto del propio compensador. Debido a que la fase tiende ansintóticamente a - 270°, se debe considerar que el valor que adquirirá será importante.

$$\phi_m = MF_d - MF_o + 12° = 45° + 18° - 12° = 39°; \quad \operatorname{sen}\phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1-\operatorname{sen}\phi_m}{1+\operatorname{sen}\phi_m} = 0.2275$$

Frecuencia de transición :

$$\left|G(j\omega_t)\right|_{db} + \left|Gc(j\omega_t)\right|_{db} = 0\text{ db}; \qquad \left|G(j\omega_t)\right|_{db} = -20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = -6.43\text{ db}$$

Gráficamente : $\left|G(j\omega_t)\right|_{db} = -6.43$ db $\Rightarrow$ $\omega_t \cong 9$ rad / seg

$$\omega t = \omega m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\,T} \quad \Rightarrow \quad \omega c = \frac{1}{T} = \sqrt{\alpha}\cdot\omega t = 4.2927\text{ rad / seg}; \qquad \omega p = \frac{1}{\alpha\cdot T} = 18.869\text{ rad / seg}$$

Compensador en adelanto:
$$Gc(s) = \frac{1+\dfrac{s}{4.2927}}{1+\dfrac{s}{18.869}} = \frac{1}{0.2275}\cdot\frac{s+4.2927}{s+18.869}$$

f) La compensación en retardo disminuye la frecuencia de transición del sistema, así pues, es

previsible que
relativamente
abierto haga c
ello se debe ca
la ganancia del

Atenuación pro
de la red comp
atenuación pro

Ganancia del si

donde 20 db e
gráficamente. E

g) En cuanto
frecuencia de t
grande, la gana
altas frecuencia
compensadora
presenta mayor

Ganancia introd

Observando que
de adelanto; así

Ganancia del sis

donde -32 db es
conclusión, no s

h) Dadas las es
fase; para cump
frecuencias, de

previsible que si la compensación es un poco forzada (separación entre el polo y cero del compensador relativamente grande), la atenuación producida sobre el módulo de la función de transferencia en lazo abierto haga caer la ganancia en lazo abierto dentro de la zona no permitida a bajas frecuencias. Para ello se debe calcular cual es la atenuación producida por la red en retardo para la frecuencia en la cual la ganancia del sistema en lazo abierto sin compensar es menor. Esta frecuencia es $\omega = 1$ rad/seg.

Atenuación producida por el retardo de fase en $\omega = 1$ rad/seg : teniendo en cuenta que el cero y el polo de la red compensadora se hallan por debajo de esta frecuencia, se puede decir que asintóticamente la atenuación producida en $\omega = 1$ rad/seg será :

$$|G_c(j\omega_t)|_{db} = 20\log\frac{1}{\beta} = -9 \text{ db}$$

Ganancia del sistema compensado en lazo abierto en $\omega = 1$:

$$|G_{LA}(j\omega_t)|_{db} = 20 \text{ dB} - 9 \text{ db} = 11 \text{ dB} < 16.9 \text{ db}$$

donde 20 db es la ganancia del sistema en lazo abierto sin compensar, como se puede observar gráficamente. En conclusión, no se cumple la condición de bajas frecuencias.

g) En cuanto a la compensación en adelanto, sabiendo que ésta se caracteriza por aumentar la frecuencia de transición del sistema; es previsible que, para un desfase introducido relativamente grande, la ganancia del sistema en lazo abierto compensado caiga dentro de la zona no permitida de altas frecuencias. De este modo, para verificarlo, se debe calcular la ganancia introducida por la red compensadora en adelanto a la frecuencia en la cual la función de transferencia en lazo abierto presenta mayor ganancia, y esta frecuencia es $\omega = 30$ rad/seg.

Ganancia introducida por el adelanto de fase en $\omega = 30$:

Observando que la frecuencia $\omega = 30$ está por encima de las frecuencias del polo y del cero de la red de adelanto; asintóticamente la ganancia introducida en $\omega = 30$ será :

$$|G_c(j\omega_t)|_{db} = 20\log\frac{1}{\alpha} = 12.86 \text{ db}$$

Ganancia del sistema compensado en lazo abierto en $\omega = 30$:

$$|G_{LA}(j\omega_t)|_{db} = -32 \text{ db} + 12.86 \text{ db} = -19.14 \text{ db} > -25.57 \text{ db}$$

donde -32 db es la ganancia de sistema en lazo abierto sin compensar, que se obtiene gráficamente. En conclusión, no se cumple la condición de altas frecuencias.

h) Dadas las especificaciones iniciales, no es posible lograr una compensación idónea en retardo de fase; para cumplir el margen de fase deseado, no se puede cumplir la condición de ganancia a bajas frecuencias, de este modo se tiene un compromiso entre ambas especificaciones. La solución tomada

en este ejercicio es la de dar prioridad a la precisión (en este caso medida como variaciones de ganancia a baja frecuencia) sobre la estabilidad (medida a partir del margen de fase del sistema). Con este criterio se debe disminuir la atenuación producida por la red en retardo para cumplir la condición de bajas frecuencias, lo que causa un acercamiento de polo y cero de la red y, en conclusión, un aumento de la frecuencia de transición y una disminución del margen de fase sobre el caso idóneo.

Se tiene el mayor margen de fase posible cuando se consigue la máxima atenuación posible mediante la red en retardo de fase. La máxima atenuación posible de esta red es :

$$\left|G_c(j\omega_t)\right|_{db,\ \omega=1} = -20\ \text{db} + 16.9\ \text{db} = -3.1\ \text{db} \quad \Rightarrow \quad 20\log\frac{1}{\beta} = -3.1\ \text{db} \quad \Rightarrow \quad \beta = 1.4289$$

Cálculo de la frecuencia de transición :

$$\left|G(j\omega_t)\right|_{db} + \left|G_c(j\omega_t)\right|_{db} = 0\ \text{db} \quad \Rightarrow \quad \left|G(j\omega_t)\right|_{db} = 3.1\ \text{db}$$

Gráficamente se observa que la frecuencia de transición es : $\omega \cong 4.5$ rad/seg.

Se debe considerar que el cero del compensador se halla una década por debajo de la frecuencia de transición :

$$\omega_c = \frac{1}{T} = \frac{\omega_t}{10} = 0.45\ \text{rad/seg}; \qquad \omega_p = \frac{1}{\beta T} = 0.3149$$

Compensador en retardo :

$$G_c(s) = \frac{1+\dfrac{s}{0.45}}{1+\dfrac{s}{0.3149}} = \frac{1}{1.4289}\,\frac{s+0.45}{s+0.3149}$$

Calculando el margen de fase obtenido :

$$\text{FASE}\left[G(j\omega_t)\right] \cong -150^\circ \quad \text{(gráficamente)} \quad \Rightarrow \quad MF = 180^\circ + \text{FASE}\left[G(j\omega_t)\right] - 5^\circ \cong 25^\circ$$

i) En este caso no se puede cumplir simultáneamente las especificaciones de ganancia a altas frecuencias (necesaria para eliminar ruido) y de estabilidad (calculada a través del margen de fase); siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior, se tiene un acercamiento entre cero y polo de la red compensadora en adelanto (necesario para que la ganancia introducida a altas frecuencias disminuya) que provoca un desfase introducido menor y, en conclusión, causa una disminución de la frecuencia de transición y del margen de fase sobre el caso idóneo.

El mayor margen de fase posible se consigue cuando se tiene la máxima ganancia permitida en la red en adelanto de fase :

$$\left|G_c(j\omega_t)\right|_{db} = -25.57\ \text{db} + 32\ \text{db} = 6.46\ \text{db} \quad \Rightarrow \quad 20\log\frac{1}{\alpha} = 6.43\ \text{db} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.47698$$

Cálculo de la f

Gráficamente l

$\omega_t = \omega_m$

Compensador

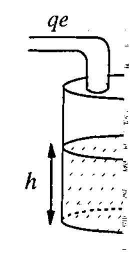
Calculando el m

F

$\text{sen}\,\phi_m = \frac{1-(}{1+(}$

Problema 5

En la figura 1
depósito de agu
eliminar el erro



En las figuras 2

- Siste
- Siste

Accionador: co

Cálculo de la frecuencia de transición:

$$\left|G(j\omega_t)\right|_{db} + \left|G_c(j\omega_t)\right|_{db} = 0 \text{ db} \Rightarrow \left|G(j\omega_t)\right|_{db} = -20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = -3.215 \text{ db}$$

Gráficamente la frecuencia de transición es: $\omega_t \cong 7$ rad/seg.

$$\omega_t = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T} \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{T} = \sqrt{\alpha}\cdot\omega_t = 4.8344 \text{ rad / seg} ; \quad \omega_p = \frac{1}{\alpha T} = 10.135 \text{ rad / seg}$$

Compensador en adelanto: $$G_c(s) = \frac{1+\dfrac{s}{4.8344}}{1+\dfrac{s}{10.135}} = \frac{1}{0.47698}\cdot\frac{s+4.8344}{s+10.135}$$

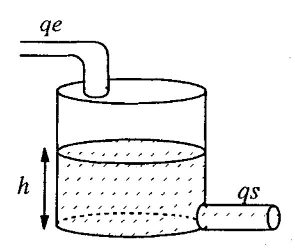
Calculando el margen de fase obtenido :

$$\text{FASE}\left[G(j\omega_t)\right] \cong -168^\circ \quad \text{(gráficamente)} \qquad MF = 180^\circ + \text{FASE}\left[G(j\omega_t)\right] + \phi_m$$

$$\text{sen}\,\phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \Rightarrow \phi_m = 20.74^\circ; \quad MF = 180^\circ + \text{FASE}\left[G(j\omega_t)\right] + \phi_m = 180^\circ - 168^\circ + 20.74^\circ = 32.74^\circ$$

Problema 5

En la figura 1 se muestran el esquema de control, y su diagrama de bloques correspondiente, de un depósito de agua. Debe observarse que, con el objetivo de mejorar la estabilidad relativa del sistema y eliminar el error en estado estacionario de posición, se ha utilizado un control proporcional-integral.



h: nivel del líquido.

qe: caudal de entrada.

qs: caudal de salida.

En las figuras 2 y 3 se trazan los diagramas de Bode del sistema en lazo abierto para las situaciones:

- Sistema sin control PI: Gc(s)=1.
- Sistema con control PI: Gc(s)=kp+ki/s.

Accionador: conjunto de bomba y motor que alimenta al depósito.

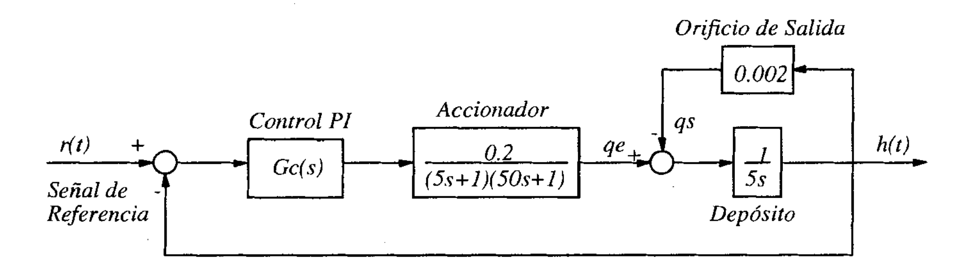


Fig. 1

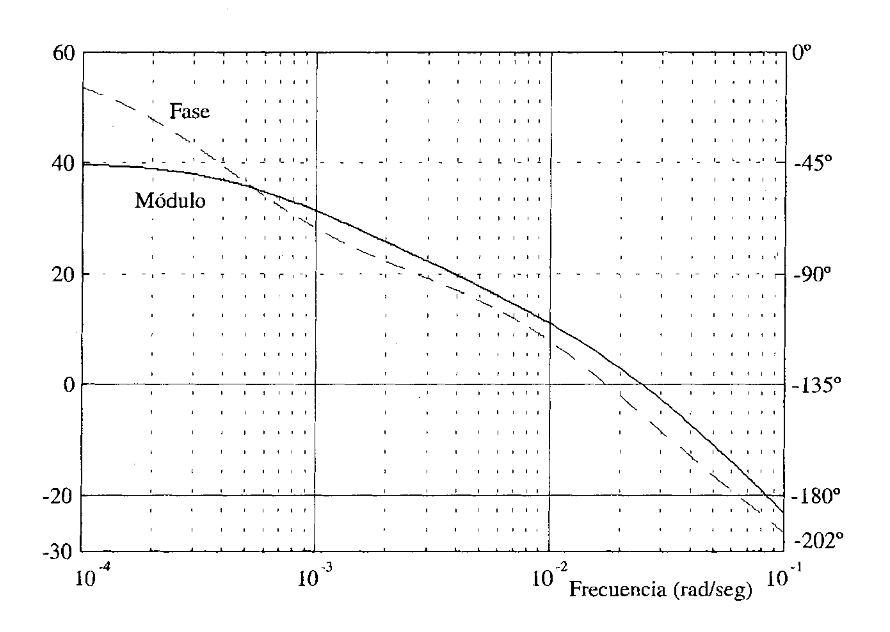


Fig. 2 Diagrama de Bode del sistema de la figura 1 sin control.

a) Determinar para *ambas situaciones*:

a.1) El error en estado estacionario ante una entrada de referencia escalón unitario.

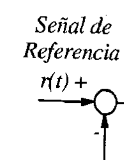
a.2) El margen de ganancia y el margen de fase; así como las frecuencias de paso por -180° y 0 db, respectivamente.

b) Calcular los parámetros kp y ki del control proporcional-integral utilizado.

c) Dibujar el diagrama polar para *las dos situaciones*, para ello rellenar la tabla 1.

d) Dibujar el diagrama de Nyquist para *ambos casos*, aplicando posteriormente el criterio de Nyquist.

A continuación, se
sistema. Dicha vál
histéresis, proporci



w	$\|G(jw)\|_{db}$	Fase[G(jw)]	Re[G(jw)]	Im[G(jw)]
0.0001				
0.0005				
0.001				
0.005				
0.01				
0.05				
0.1				

Tabla 1

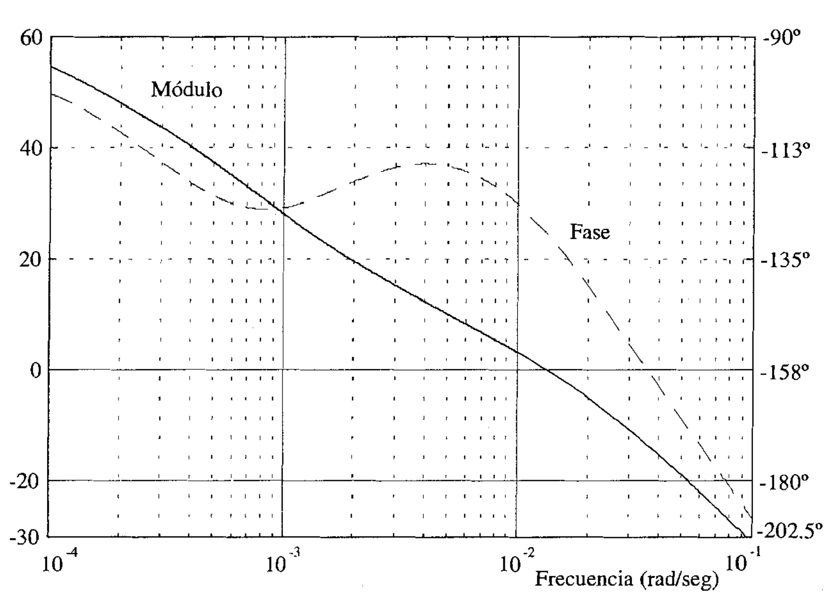


Fig. 3 Diagrama de Bode del sistema de la figura 1 con control PI.

A continuación, se desea estudiar el efecto de la válvula del caudal de entrada sobre la respuesta del sistema. Dicha válvula posee únicamente dos posiciones presentando la característica de un relé sin histéresis, proporcionando el diagrama de bloques que se muestra en la figura 4.

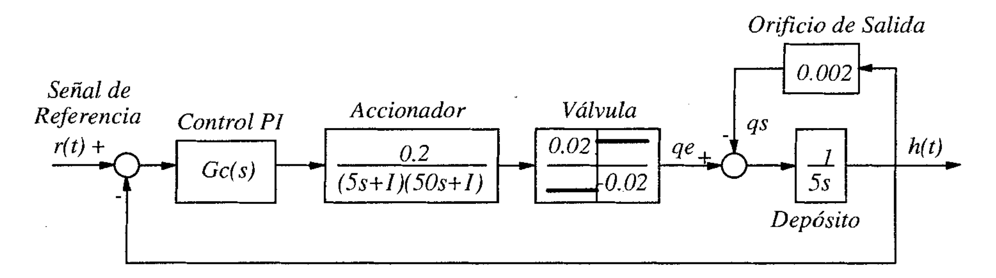
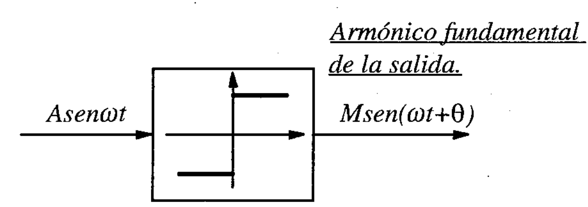


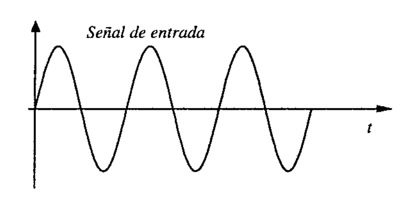
Fig. 4

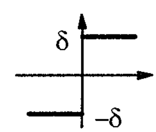
Se define la función descriptiva de un elemento no lineal como la relación que existe entre una señal senoidal en su entrada y el primer armónico (armónico fundamental del desarrollo en serie de Fourier) que se obtiene a su salida, como se muestra en la figura 5.

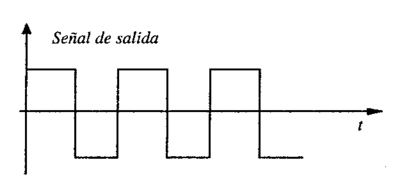


Función descriptiva: $N(A) = \frac{M}{A} \cdot e^{j\theta}$

Fig. 5

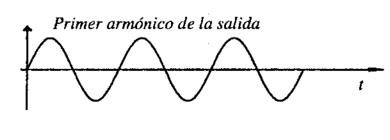






En el caso de un relé sin histéresis la función descriptiva resulta:

$$N(A) = \frac{4 \cdot \delta}{\pi \cdot A}$$



Debe notarse que la función descriptiva es función de la amplitud de la señal senoidal a la entrada del elemento no lineal (A).

Fig. 6

Sabiendo que el resto de armónicos generados por el elemento no lineal son filtrados por el sistema de control permitiendo el diagrama de bloques de la figura 7 en régimen permanente senoidal.

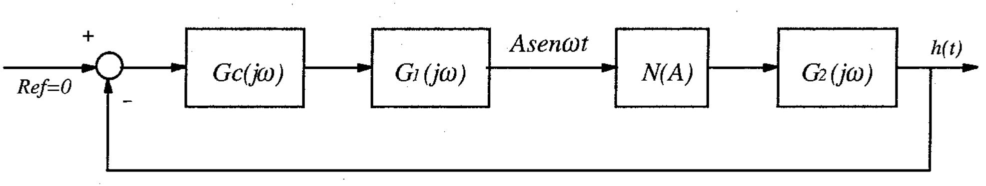


Fig. 7

e) Determinar la función de transferencia en dominio frecuencial H(jw)/R(jw). Determinar la ecuación característica del sistema en dominio frecuencial.

f) A partir del diagrama polar del sistema con control proporcional-integral :

f.1) Representar en dicho plano la función F(A)=-1/N(A) para A=0.001, 0.002, 0.003, 0.004. (d=0.02)

f.2) Determinar el punto de intersección entre el diagrama polar y la función F(A). Calcular la amplitud (A) y la frecuencia de la oscilación generada por el relé sin histéresis. Razonar la respuesta.

g) ¿En esta situación, qué tipo de acción de control sería la más idónea?. Razonar la respuesta.

Solución :

a.1) La determinación del error estacionario para el sistema sin control puede resolverse a partir del diagrama de Bode proporcionado; para ello únicamente debe observarse que el módulo de la función de transferencia en Lazo Abierto permanece constante e igual a 40 db para frecuencias por debajo de 10^{-4}, de este modo el valor de kp=100, lo cual proporciona un error de $e_{ssp}=1/(1+100)\approx 0.01$, esto es, se tiene un error estacionario del 1%, aproximadamente. Obviamente, se puede obtener la misma conclusión a partir de la función de transferencia en lazo abierto:

$$kp = \lim_{s\to 0} \frac{0.2}{(5s+1)(50s+1)(5s+0.002)} = 100$$

$$essp = \frac{1}{1+kp} = \frac{1}{1+100} \approx 0.01$$

Por otra parte, el error estacionario de posición al introducir el control proporcional-integral es nulo, como bien indica el enunciado del problema, dado el carácter integrativo que se introduce al sistema (adición de un polo en origen en la función de transferencia en lazo abierto).

a.2) Para obtener el margen de ganancia y el margen de fase, así como las frecuencias de paso por -180° y 0 db, respectivamente, únicamente debe observarse los diagramas de Bode proporcionados y realizar la tabla siguiente:

	Sistema sin control PI	Sistema con control PI
Frecuencia de paso por 0 db.	0.025 rad/seg	0.014 rad/seg
Margen de Fase.	34°	48°
Frecuencia de paso por -180°	0.065 rad/seg	0.06 rad/seg
Margen de Ganancia.	15 db	22 db

b) Cálculo de los parámetros kp y ki del control proporcional-integral utilizado:

Para resolver este apartado debe recordarse que el control proporcional-integral se encuentra siempre por debajo de la frecuencia de transición del sistema compensado (en este caso $\omega t=0.014$ rad/seg). De este modo se puede observar en esta frecuencia cuál es la atenuación que introduce el control PI; dicha atenuación es igual a 8 db, con lo que se obtiene :

$$20 \log kp = -8db \quad \Rightarrow \quad kp \approx 0.4$$

Por otra parte, debe verificarse cual es el remanente de fase introducido por el control PI sobre la frecuencia de transición, observando que es, aproximadamente, de unos 8°, con lo cual puede considerarse que el cero introducido por la red compensadora se encuentra una década por debajo de la frecuencia de transición:

$$\omega_c = \frac{ki}{kp} = \frac{\omega_t}{10} = 0.0014 \text{ rad / seg} \quad \Rightarrow \quad ki = 5.6 \cdot 10^{-4}$$

En conclusión, la red compensadora PI es:

$$Gc(s) = 0.4 + \frac{5.6 \cdot 10^{-4}}{s}$$

c) Para trazar el diagrama polar es necesario medir módulo y fase en el diagrama de Bode y expresar el complejo en parte real y parte imaginaria (lineal).

Observando en diagrama de Bode para el sistema sin control PI se obtiene la siguiente tabla :

w	$\|G(jw)\|_{db}$	Fase[G(jw)]	Re[G(jw)]	Im[G(jw)]
0.0001	40	-14°	97	-24.2
0.0005	36	-54°	37	-51
0.001	32	-70°	13.6	-37.4
0.005	18	-101°	-1.5	-7.8
0.01	12	-115°	-1.7	-3.6
0.05	-10	-170°	-0.3	-0.05
0.1	-23	-194°	-0.07	0.02

Con el control PI se obtiene la siguiente tabla :

w	$\|G(jw)\|_{db}$	Fase[G(jw)]	Re[G(jw)]	Im[G(jw)]
0.0001	60	-101°	-190	-981
0.0005	38	-124°	-44	-66
0.001	28	-128°	-15.5	-19.8
0.005	10	-118°	-0.47	-0.9
0.01	3	-124°	-0.8	-1.17
0.05	-20	-170°	-0.1	-0.017
0.1	-32	-194°	-0.024	-0.006

En las figuras 8 y 9 se muestran los diagramas polares obtenidos.

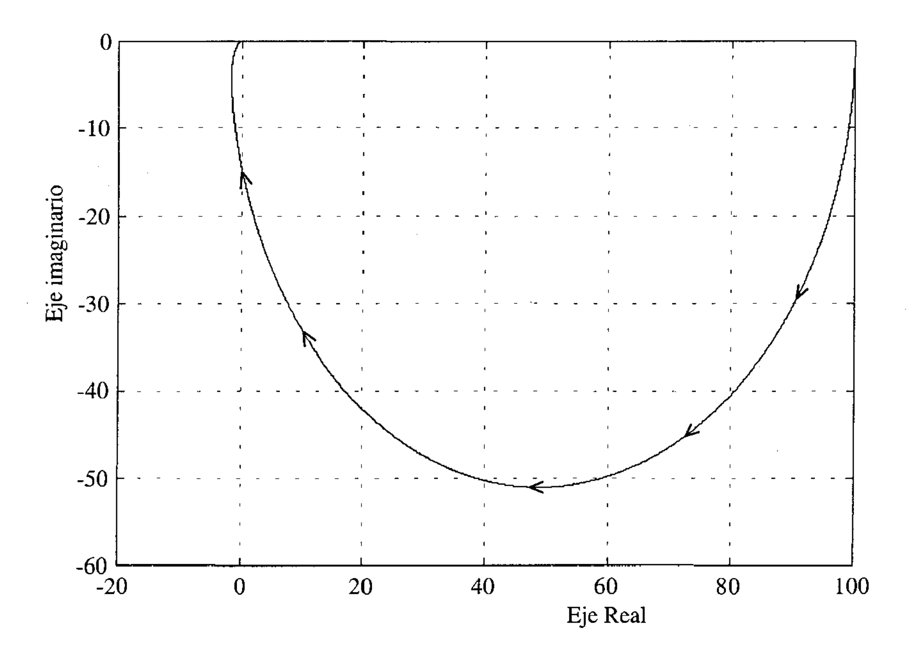


Fig. 8 Diagrama Polar del sistema sin control.

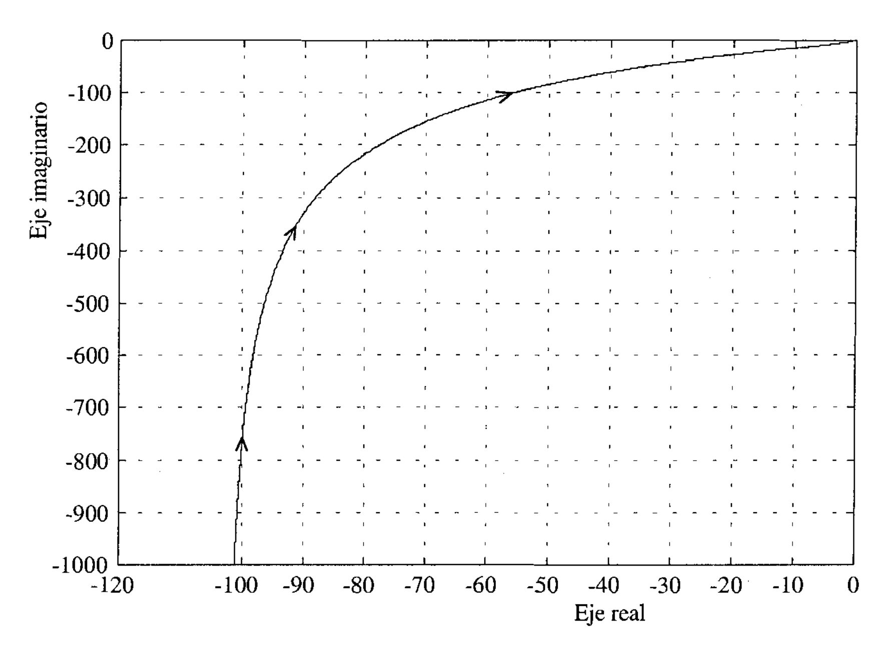


Fig. 9 Diagrama Polar del sistema con control PI.

d) Para trazar el diagrama de Nyquist debe trazarse el simétrico del diagrama polar respecto al eje real, así como realizar una semicircunvalación de radio infinito en sentido horario debido al polo en origen introducido por el PI en lazo abierto.

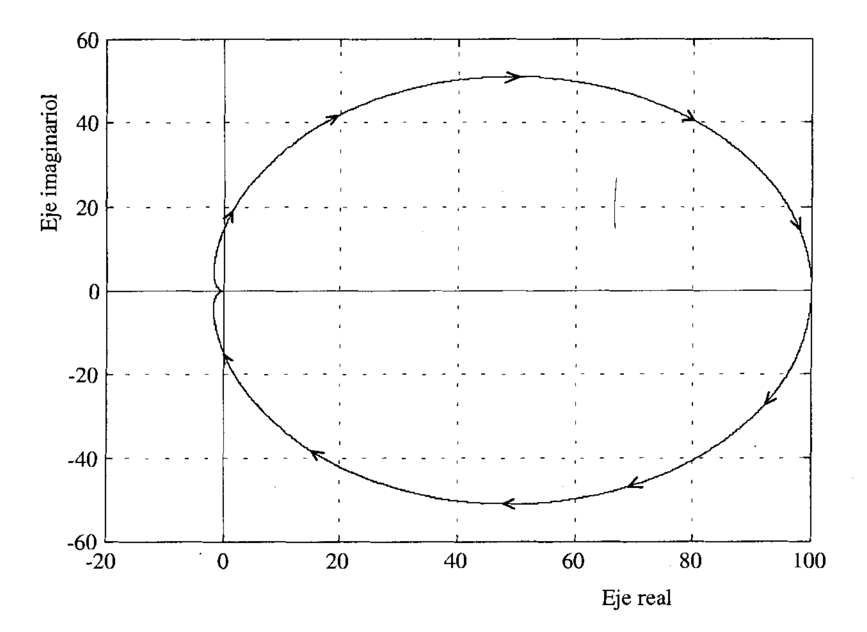


Fig. 10 Diagrama de Nyquist del sistema sin control PI.

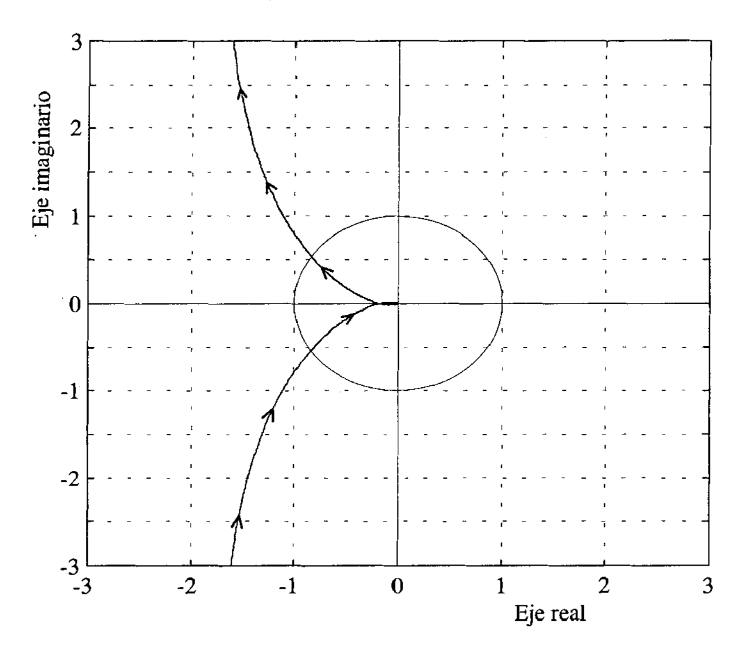


Fig. 11 Ampliación del diagrama de Nyquist del sistema con control PI alrededor de $-1+j0$.

Aplicando el criterio de Nyquist, se determina la estabilidad absoluta; observando que no existe ningún rodeo al punto -1+j0 en el diagrama de Nyquist, siendo, de este modo, ambos sistemas estables, como era de prever, a partir del margen de fase y margen de ganancia obtenidos anteriormente.

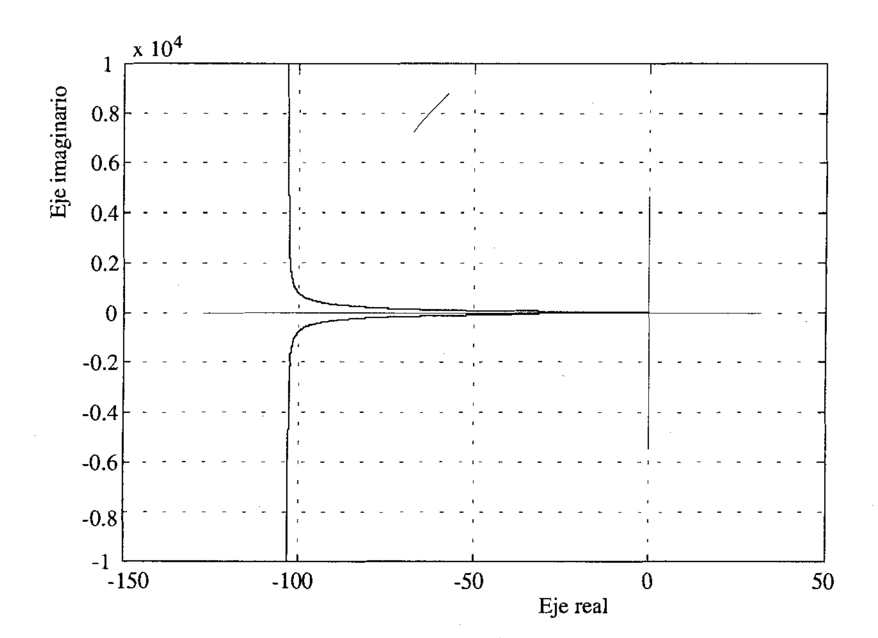


Fig. 12 Diagrama de Nyquist del sistema sin control PI.

e) Se desea estudiar el efecto sobre la respuesta del sistema de la adición al mismo de un elemento no lineal; para ello debe obtenerse la función de transferencia en dominio frecuencial H(jω)/R(jω), así como la ecuación característica del sistema siguiente :

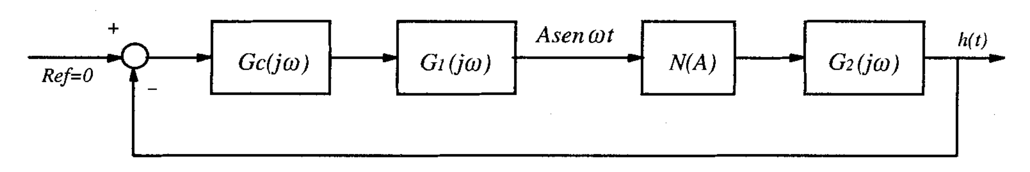


Fig. 13

Función de transferencia en lazo cerrado:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G_c(j\omega) \cdot G_1(j\omega) \cdot N(A) \cdot G_2(j\omega)}{1 + G_c(j\omega) \cdot G_1(j\omega) \cdot N(A) \cdot G_2(j\omega)}$$

Ecuación característica:

$$1 + G_c(j\omega) \cdot G_1(j\omega) \cdot N(A) \cdot G_2(j\omega) = 0 \Rightarrow 1 + G_{LA}(j\omega) \cdot N(A) = 0 \Rightarrow G_{LA}(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

f) A partir del diagrama polar del sistema con control proporcional-integral :

f.1) Representar en dicho plano la función F(A)=-1/N(A) para A=0.001, 0.002, 0.003, 0.004. (d=0.02).

Para estos valores se puede formar la siguiente tabla:

	A=0.001	A=0.002	A=0.003	A=0.004
F(A)	-0.0322	-0.07854	-0.1178	-0.15768

donde : $$F(A) = -\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi \cdot A}{4 \cdot \delta}$$

Como conclusión, se puede indicar que el trazado de F(A) en el plano corresponde al semieje real negativo, obteniendo diversos valores en función del parámetro A.

f.2) De este modo, el punto de intersección entre las dos curvas corresponde a la solución de la ecuación característica, obteniendo de este modo una respuesta oscilatoria de amplitud A y frecuencia de oscilación propia del punto del diagrama polar. El cálculo del punto de intersección es muy simple porque, al encontrarse sobre el eje real, puede obtenerse a partir del margen de ganancia:

$$MG = 22db \;\Rightarrow\; \frac{1}{MG(lineal)} = 0.0794 \;\Rightarrow\; F(A) = -0.0794 \;\Rightarrow\; A = 0.002022$$

La frecuencia de oscilación es ω=0.06 rad/seg (frecuencia a la cual se mide el MG).

g) En conclusión, dada la aparición de una no linealidad, no es útil la adición al sistema de una acción integradora, porque la respuesta final contiene una componente oscilatoria; de este modo es preferible la utilización de un control proporcional-derivativo ya que proporciona una buena estabilidad relativa y una mayor velocidad en la respuesta temporal.

6. Realiza

En este capítul
han estudiado
decir, se dará u

Para realizar
componentes e
puede resolver
adecuados a la
olvidado las té

6.1 Circuitos

6.1.1 Introduc

Existen diversa
ya sea mediant
circuitos integr

En este aparta
estudiaremos c
diseñados de fo
del *amplificad*
uso muy exten
circuitos, comp

Este amplifica
operaciones c
igualmente con

6.1.2 El ampli

Un amplificad
elevada gananc
determinadas p

6. Realización electrónica de sistemas de control

En este capítulo se pretende abordar la forma de llevar a la práctica todos aquellos conceptos que se han estudiado en los capítulos anteriores acerca del diseño de los distintos sistemas de control, es decir, se dará una perspectiva general de la tecnología propia de los sistemas electrónicos de control.

Para realizar este estudio se ha tratado de evitar descripciones demasiado detalladas de los componentes en constante evolución, y también se ha tratado de demostrar que un mismo problema puede resolverse por distintos procedimientos. Así pues, si bien se han analizado los desarrollos más adecuados a las técnicas modernas (electrónica digital, instrumentación virtual, etc.), tampoco se han olvidado las técnicas más clásicas, como puedan ser las técnicas analógicas.

6.1 Circuitos analógicos

6.1.1 Introducción

Existen diversas posibilidades de llevar a cabo un sistema de control mediante electrónica analógica, ya sea mediante complejos circuitos a base de transistores y componentes discretos, o bien, mediante circuitos integrados diseñados específicamente para llevar a cabo una acción de control.

En este apartado se analizará un caso intermedio, es decir, no bajaremos al nivel del transistor, ni estudiaremos circuitos integrados específicos, sino que los sistemas de control que se verán, estarán diseñados de forma sencilla y serán de simple construcción. Para ello se hará uso de las características del *amplificador operacional*, un componente formado a base de diversas etapas de transistores y de uso muy extendido, por lo que su precio es moderado, además de ser de uso sencillo en el diseño de circuitos, comparado con los circuitos formados por transistores discretos.

Este amplificador se denomina operacional, ya que puede utilizarse para realizar diferentes operaciones con las señales eléctricas (adición, derivación, integración, ...), pudiendo servir igualmente como amplificador de un sistema de control.

6.1.2 El amplificador operacional

Un amplificador operacional es un amplificador diferencial de corriente continua que posee una elevada ganancia. Su uso es habitual en configuraciones de circuitos que disponen de características determinadas por redes externas de realimentación.

La función de transferencia de cualquier circuito electrónico es, como ya se vio en capítulos anteriores, la relación entre la función de salida y la función de entrada. Para un amplificador de tensión, la función de transferencia o ganancia viene determinada por la expresión:

$$A_v = \frac{Vo}{Vi} \tag{6.1}$$

La mejor aproximación para el diseño de circuitos es suponer que el amplificador operacional es ideal, lo que permite realizar el cálculo de la función de transferencia de forma mucho más sencilla. Con posterioridad al diseño inicial, se deberán comprobar las características no ideales del amplificador operacional para determinar cómo afectan al circuito. Si los efectos no son importantes, el diseño estará completo; en otro caso, se necesitará realizar un diseño adicional.

La figura 6.1 representa el circuito equivalente simplificado de un ampliador operacional (AO). El modelo consiste en una impedancia de entrada R_d conectada entre dos terminales de entrada V_1 y V_2. La etapa de salida está formada por una fuente de tensión controlada en serie con una resistencia de salida R_o conectada al terminal de salida. La diferencia de tensión entre los dos terminales de entrada provoca un flujo de corriente a través de R_d. La tensión diferencial es multiplicada por A, la ganancia del AO, para generar la tensión de salida.

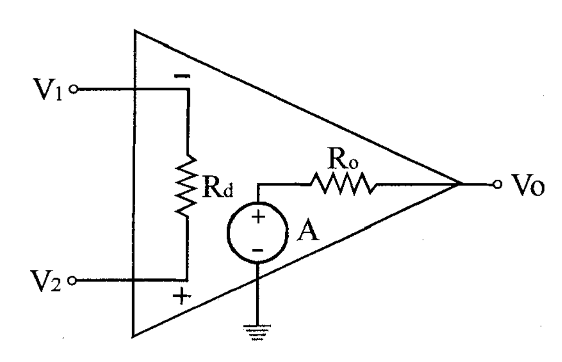


Fig. 6.1 Circuito equivalente de un amplificador operacional (AO)

Para simplificar los cálculos de diseño, deberemos asumir las siguientes características para un amplificador operacional ideal:

- Ganancia en lazo abierto = ∞
- Impedancia de entrada $R_d = \infty$
- Impedancia de salida $R_o = 0$
- Ancho de banda = ∞ (respuesta en frecuencia infinita)
- $V_o = 0$ cuando $V_1 = V_2$ (tensión de salida sin *offset*)

Esta última característica es muy importante. La figura 6.1 muestra que $V_2 - V_1 = V_o/A$. Si V_o es finita y A es infinita (típicamente 10^5), entonces $V_2 - V_1 = 0$ y $V_1 = V_2$. Ya que R_d, la impedancia diferencial

entre V_1 y V_2, es elevada, y $V_1 = V_2$, es posible despreciar la corriente en R_d. Estas dos suposiciones son muy útiles en el diseño de circuitos con amplificadores operacionales. Podemos resumirlas en dos reglas básicas:

- Regla 1: Cuando el amplificador operacional trabaja en su zona lineal, las dos entradas presentan la misma tensión (característica de *cortocircuito virtual*).

- Regla 2: No existe circulación de corriente a través de los terminales de entrada al AO.

Cuando los AO se representan en diagramas circuitales, no se utiliza el símbolo de la figura 6.1, sino el que podemos observar en la figura siguiente.

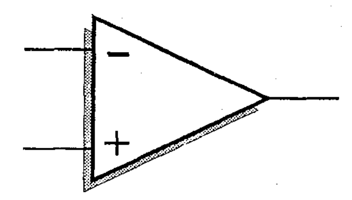


Fig. 6.2 Símbolo circuital del amplificador operacional

6.1.3 Circuitos básicos con amplificadores operacionales

En los apartados siguientes supondremos que el amplificador operacional es ideal, lo que nos permitirá obtener una serie de circuitos útiles. En muchos de los circuitos, los amplificadores operacionales se utilizan en configuraciones de lazo cerrado. Las redes de realimentación del AO reducen la ganancia y añaden al operacional características muy útiles.

6.1.3.1 Amplificador inversor

La figura 6.2 muestra el circuito amplificador inversor básico. Este circuito se usa en una gran variedad de aplicaciones, incluyendo la instrumentación. La impedancia de realimentación, en este caso R_1, permite que el amplificador inversor disponga de un ancho de banda amplio y una impedancia de salida reducida.

Resulta sencillo calcular la ganancia o función de transferencia de este circuito, ya que, como hemos considerado en la regla 2, por las líneas de entrada al AO no circula corriente, luego la entrada no inversora está a un potencial de 0 V. Por la regla 1, o del cortocircuito virtual, la entrada inversora debe tener también un potencial de 0 V, así que, a efectos prácticos, el terminal inversor está conectado a masa.

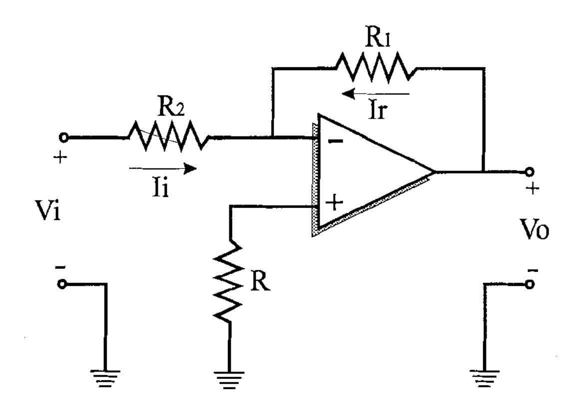


Fig. 6.3 Circuito inversor básico

La ley de Kirchoff indica que la suma de todas las corrientes entrantes y salientes de una unión debe ser cero. Por la regla 2, no existe corriente entrante al AO, luego:

$$Ii + Ir = 0 \Rightarrow Ii = -Ir \qquad (6.2)$$

Ya que la parte derecha de R_2 está a potencial de masa (0 V), y la parte izquierda está a Vi, por la ley de Ohm, Ii = Vi/R_2. Utilizando el mismo razonamiento, Ir = Vo/R_1. Sustituyendo estos valores en la ecuación (6.2) obtenemos:

$$\frac{Vi}{R_2} = -\frac{Vo}{R_1} \Rightarrow \frac{Vo}{Vi} = -\frac{R_1}{R_2} \qquad (6.3)$$

El circuito, como vemos, invierte la señal de entrada, y la ganancia del amplificador inversor es por tanto $-R_1/R_2$.

El rango de comportamiento lineal del circuito viene determinado por las tensiones de alimentación. La figura 6.4 muestra que el circuito se satura para una tensión de alimentación de ±15 V cuando Vo excede la tensión de saturación Vs, que es típicamente de ±13 V.

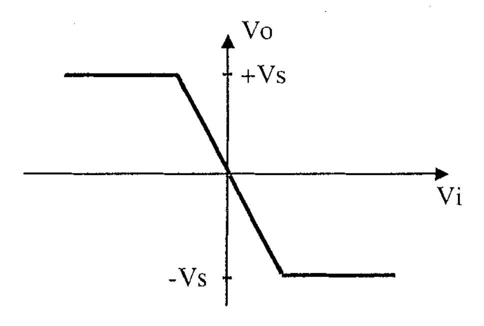


Fig. 6.4 Característica entrada-salida del inversor

Cualquier incremento en Vi no provoca ningún cambio en la salida. Para la mayoría de amplificadores operacionales, la variación máxima de la tensión de salida dentro de la zona lineal es alrededor de 4 V menor que la diferencia entre las tensiones de alimentación.

La impedancia de entrada del amplificador inversor es normalmente baja. Ya que el terminal inversor está esencialmente a masa, la impedancia de entrada vista por la señal es R_2. Incrementando R_2, la impedancia de entrada puede aumentarse, pero esto redunda en una disminución de la ganancia disponible. La ganancia puede elevarse aumentando R_1, pero existe un límite práctico del valor máximo de R_1.

6.1.3.2 Amplificador no inversor

La figura 6.5 muestra el segundo circuito básico del AO, el amplificador no inversor. Por la regla 1, tenemos Vi tanto en la entrada no inversora como en la inversora. Por la regla 2, Ir debe circular a través de R_2 hacia masa, ya que el AO no puede absorber corriente. Por la regla del divisor de tensión:

$$Vi = \frac{R_2 Vo}{R_1 + R_2} \Rightarrow \frac{Vo}{Vi} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \qquad (6.4)$$

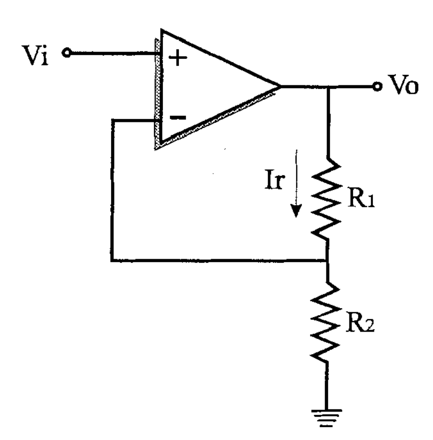


Fig. 6.5 Amplificador no inversor

En el amplificador no inversor, la ganancia del circuito es positiva y siempre mayor o igual que 1, y la impedancia de entrada es muy elevada, aproximadamente infinita.

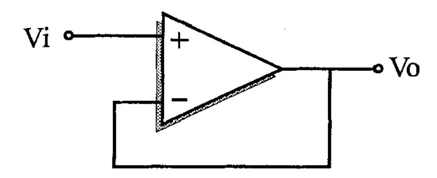


Fig. 6.6 Amplificador de ganancia unidad o seguidor de tensión

Si en el amplificador no inversor suponemos la resistencia R_2 infinita y $R_1 = 0$, el circuito se reduce al de la figura 6.6. Por la regla 1, Vi debe ser la tensión que tengamos en la entrada inversora, que está conectada directamente a Vo. De esta forma Vo = Vi, con lo que la tensión de salida sigue a la de entrada.

6.1.3.3 Amplificador sumador

Un inversor, por las características del AO, puede sumar diversas tensiones de entrada. Cada entrada puede conectarse a la entrada inversora a través de una resistencia de ponderación.

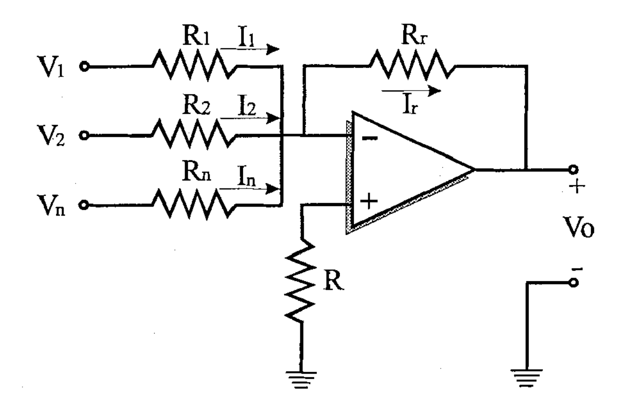


Fig. 6.7 Amplificador sumador

La figura 6.7 representa un amplificador sumador básico. Como en el amplificador inversor, la tensión en la entrada inversora debe ser igual a cero, además de que la corriente entrante al AO debe ser nula. De esta forma:

$$Ir = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$$

Teniendo en cuenta que:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1};\ I_2 = \frac{V_2}{R_2};\ \ldots\ ;\ I_n = \frac{V_n}{R_n} \qquad (6.5)$$

Ya que la entrada inversora está a tensión cero, Vo = -Rr·Ir. Por sustitución:

$$Vo = -R_r \cdot \left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \ldots + \frac{V_n}{R_n} \right) \qquad (6.6)$$

La resistencia de realimentación Rr determina la ganancia global del circuito. Las resistencias R_1, R_2, ..., R_n, determinan los factores de ponderación y las impedancias de entrada de los respectivos canales.

6.1.3.4 Integrador

El integrador es un circuito electrónico que genera una salida proporcional a la integral de la señal de entrada. La figura 6.8 muestra un integrador analógico simple. El condensador C está conectado entre la entrada inversora y la salida. De esta forma, la tensión en bornes del condensador es además la tensión de salida.

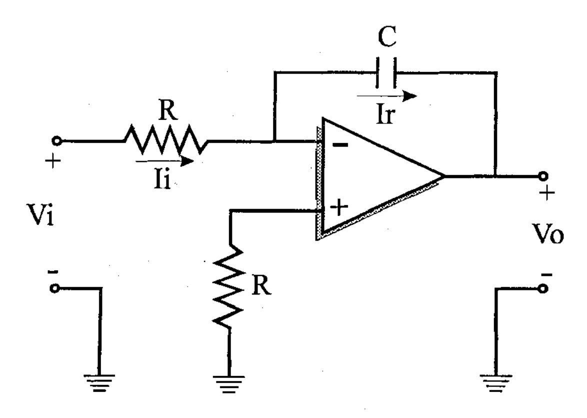


Fig. 6.8 Integrador analógico

La tensión en bornes de un condensador viene determinada por la expresión:

$$V_c = \frac{1}{C}\int_0^t i_c(t)\,dt + v_{ic} \tag{6.7}$$

donde i_c (t) es la corriente a través del condensador C, *t* es el tiempo de integración y v_{ic} es la tensión inicial del condensador. Para Vi positiva, Ii = Vi/R. Dado que Ir = Ii y debido a la inversión:

$$Vo = \frac{-1}{RC}\int_0^t Vi\,dt \tag{6.8}$$

Esto demuestra que Vo es igual a la integral negativa de la tensión de entrada, en el intervalo de integración, escalada por un factor de ganancia 1/RC.

Si realizamos la transformación de Laplace de la expresión (6.8), suponiendo condiciones iniciales nulas, podremos obtener la función de transferencia de este circuito.

$$\frac{Vo(s)}{Vi(s)} = \frac{-1}{RCs} \tag{6.9}$$

6.1.3.5 Derivador

El amplificador derivador ofrece una señal de salida proporcional a la variación temporal de la señal de entrada. La figura 6.9 nos muestra un circuito derivador simple, donde la corriente a través del condensador viene determinada por la expresión:

$$I_i(t) = C\frac{dV_i(t)}{dt} \tag{6.10}$$

Si $dV_i(t)/dt$ es positiva, $I_i(t)$ circula a través de R en una dirección tal que genera una tensión Vo negativa. De esta forma:



$$V_o(t) = -RC\frac{dV_i(t)}{dt} \tag{6.11}$$

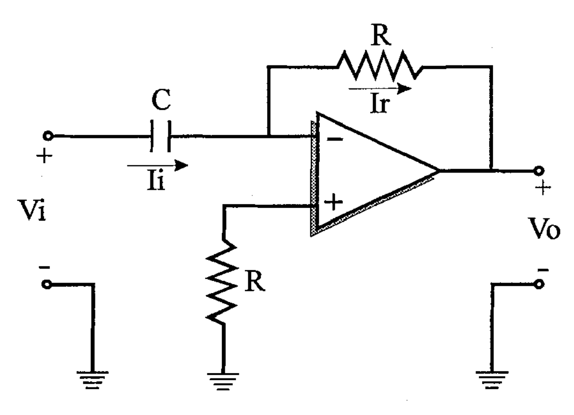


Fig. 6.9 Circuito derivador

Si ahora realizamos la transformada de Laplace de la ecuación (6.11), suponiendo condiciones iniciales nulas, podremos obtener la función de transferencia de este circuito.

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -RCs \tag{6.12}$$

6.1.4 Sistemas de control con amplificadores operacionales

En el apartado anterior se ha demostrado la capacidad del amplificador operacional para llevar a cabo toda una serie de funciones analógicas con las señales. Esta versatilidad de acción, nos proporciona un medio sencillo de implementar los sistemas de control que hemos podido estudiar a lo largo de los capítulos anteriores.

6.1.4.1 Control proporcional

Aprovechando la característica del amplificador inversor que se ha visto en el apartado 6.1.3.1, es posible implementar un control de tipo P, ya que, como recordaremos, su función de transferencia no es más que una constante.

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K \tag{6.13}$$

La función d
(6.3), una c
resistencia d
a cabo fáciln

Vemos que,
entrada. Est
amplificador
observar en
mismo signo

+
Verr
-

El circuito d

6.1.4.2 Con

El control p
proporcional

En los apar
mediante an
acción prop

Para unir an
como demu
todas las señ

En la figura

La función de transferencia de un amplificador inversor es, como podemos comprobar por la ecuación (6.3), una constante determinada por la relación entre la resistencia de realimentación R_1, y la resistencia de entrada R_2. El ajuste de la constante de proporcionalidad K del control P podría llevarse a cabo fácilmente variando la relación entre las resistencias del amplificador.

Vemos que, según (6.3), existe una inversión de signo de la señal de salida con respecto a la de entrada. Esto puede ser fácilmente solucionado mediante la incorporación de una segunda etapa amplificadora inversora, pero con sus resistencias ajustadas a una ganancia unidad, como se puede observar en la figura siguiente. La doble inversión de signo implica que la señal de salida tendrá el mismo signo que la de entrada.

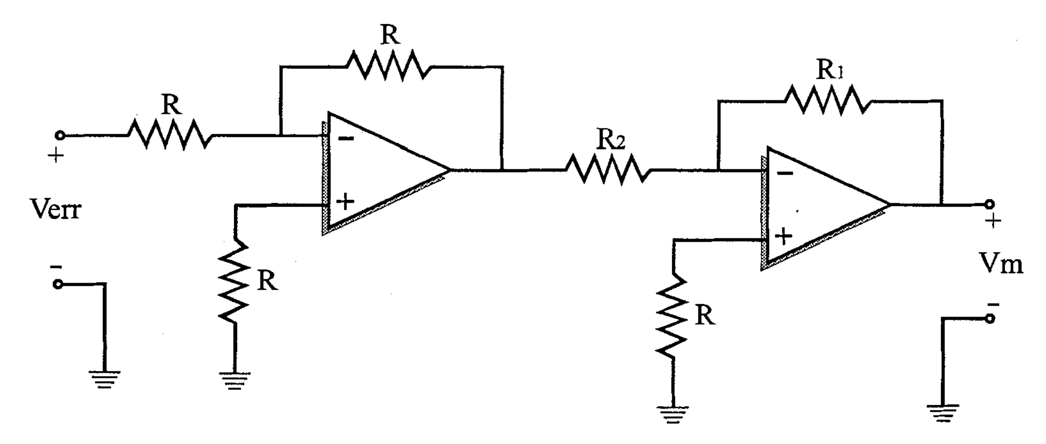


Fig. 6.10 Control proporcional

El circuito de la figura 6.10 tendrá como función de transferencia:

$$\frac{V_m(s)}{V_{err}(s)} = \frac{R_1}{R_2} = K \quad (6.14)$$

6.1.4.2 Control proporcional-integral

El control proporcional-integral, como ya se vio en el tema 3, está formado por la unión de la acción proporcional y la acción integral.

En los apartado anteriores se ha demostrado que es posible conseguir ambos tipos de acciones mediante amplificadores operacionales: la acción integral, mediante un integrador analógico, y la acción proporcional, mediante un amplificador inversor.

Para unir ambas acciones, se puede hacer uso del circuito sumador visto en el apartado 6.1.3.3, que, como demuestra la ecuación (6.6), ofrece a su salida una señal producto de la suma ponderada de todas las señales de entrada.

En la figura 6.11, podemos observar una configuración típica de este control.

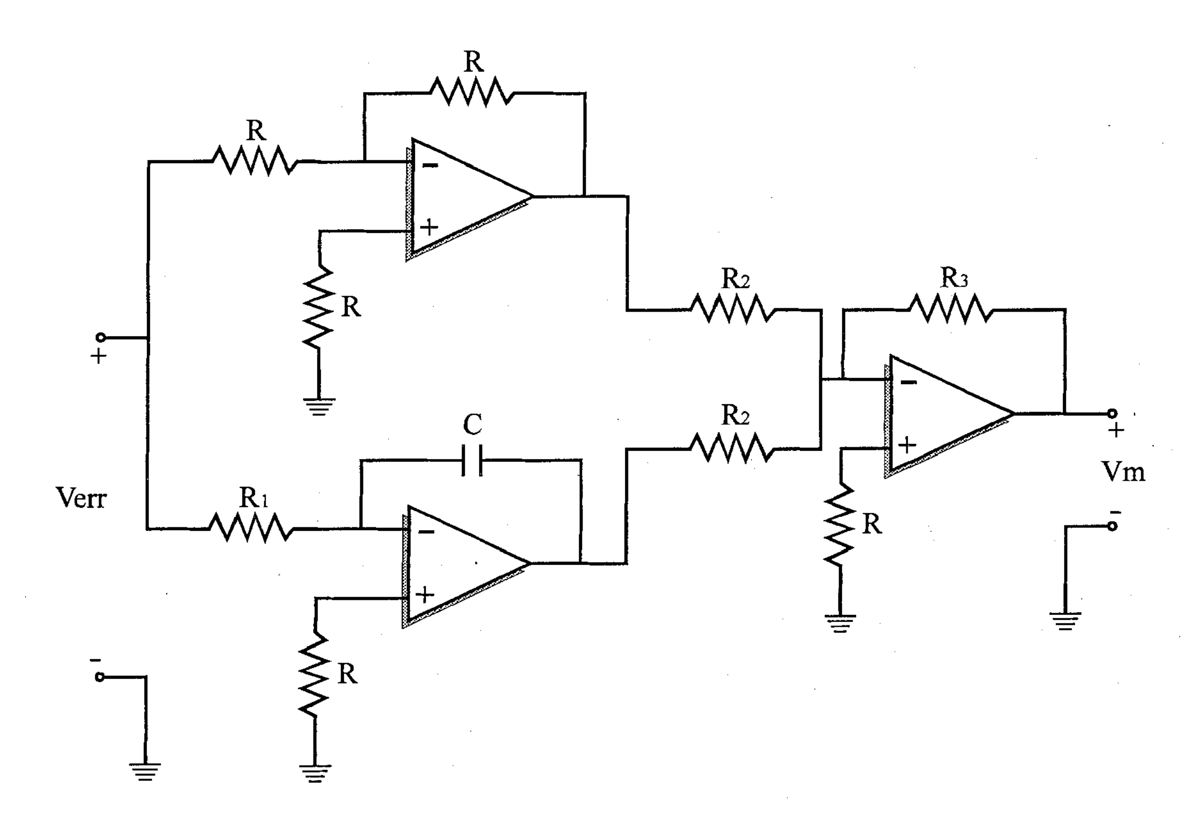


Fig. 6.11 Control proporcional-integral

En el circuito de la figura anterior, la función de transferencia viene dada por:

$$\frac{V_m(s)}{V_{err}(s)} = \frac{R_3}{R_2} \cdot \left[1 + \frac{1}{R_1 C s}\right] = K \cdot \left[1 + \frac{1}{T_i s}\right] \tag{6.15}$$

donde la constante de tiempo integral $Ti = R_1C$.

Como vemos, la ecuación (6.15) se corresponde con la función de transferencia de un control PI, tal y como se vio en el tema 3.

Hay que hacer notar que, en este caso, no ha sido necesaria una segunda etapa inversora para compensar el cambio de signo de los amplificadores que constituyen las etapas integral y proporcional, ya que el propio sumador provoca una segunda inversión de signo.

De la misma forma, y haciendo uso de una etapa derivadora en lugar de una integradora, podría construirse un control de tipo proporcional-derivativo, y si combinamos las tres etapas, un control PID.

6.1.4.3 Detector de error

El detector de error es un dispositivo encargado de generar una señal de error e(t), resultado de la diferencia entre la señal de referencia r(t) y la señal realimentada de la salida. Esta señal de error e(t) será la que inyectemos al control para obtener la acción de control m(t) adecuada que corrija dicho error.

Mediante el uso de amplificadores operacionales, resulta sencillo llevar a cabo la construcción de un detector de error, como podemos observar por la figura siguiente.

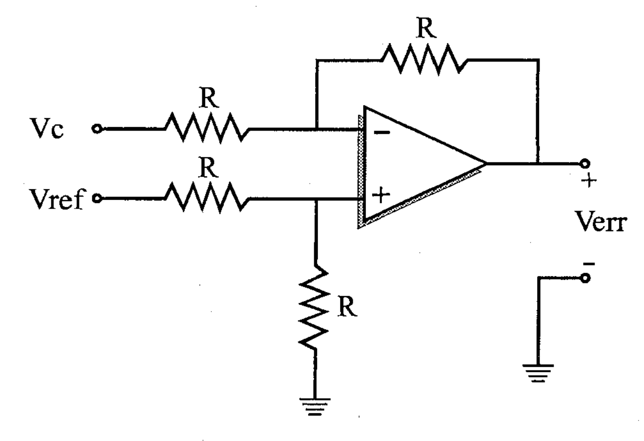


Fig. 6.12 Detector de error

A partir de la regla 2, es posible asegurar que no va a circular corriente hacia el AO por su entrada no inversora, luego la tensión en este punto vendrá determinada por el divisor de tensión que existe entre V_{ref} y masa.

$$V^{+} = V_{ref} \cdot \frac{R}{R+R} = \frac{V_{ref}}{2} \tag{6.16}$$

Por la misma razón, la tensión en la entrada inversora dependerá únicamente delas tensiones V_c y V_{err}.

$$V^{-} = V_c \cdot \frac{R}{R+R} + V_{err} \cdot \frac{R}{R+R} = \frac{V_c}{2} + \frac{V_{err}}{2} \tag{6.17}$$

Haciendo uso de la regla 1, que implica un cortocircuito virtual, las tensiones en la entrada inversora y la no inversora deben ser iguales, así que, igualando (6.16) a (6.17) obtenemos:

$$V_{err} = V_{ref} - V_c \tag{6.18}$$

Este detector de error puede utilizarse, conjuntamente con los controles adecuados, para cerrar el lazo en un sistema de control completo, como puede verse en la figura 6.13.

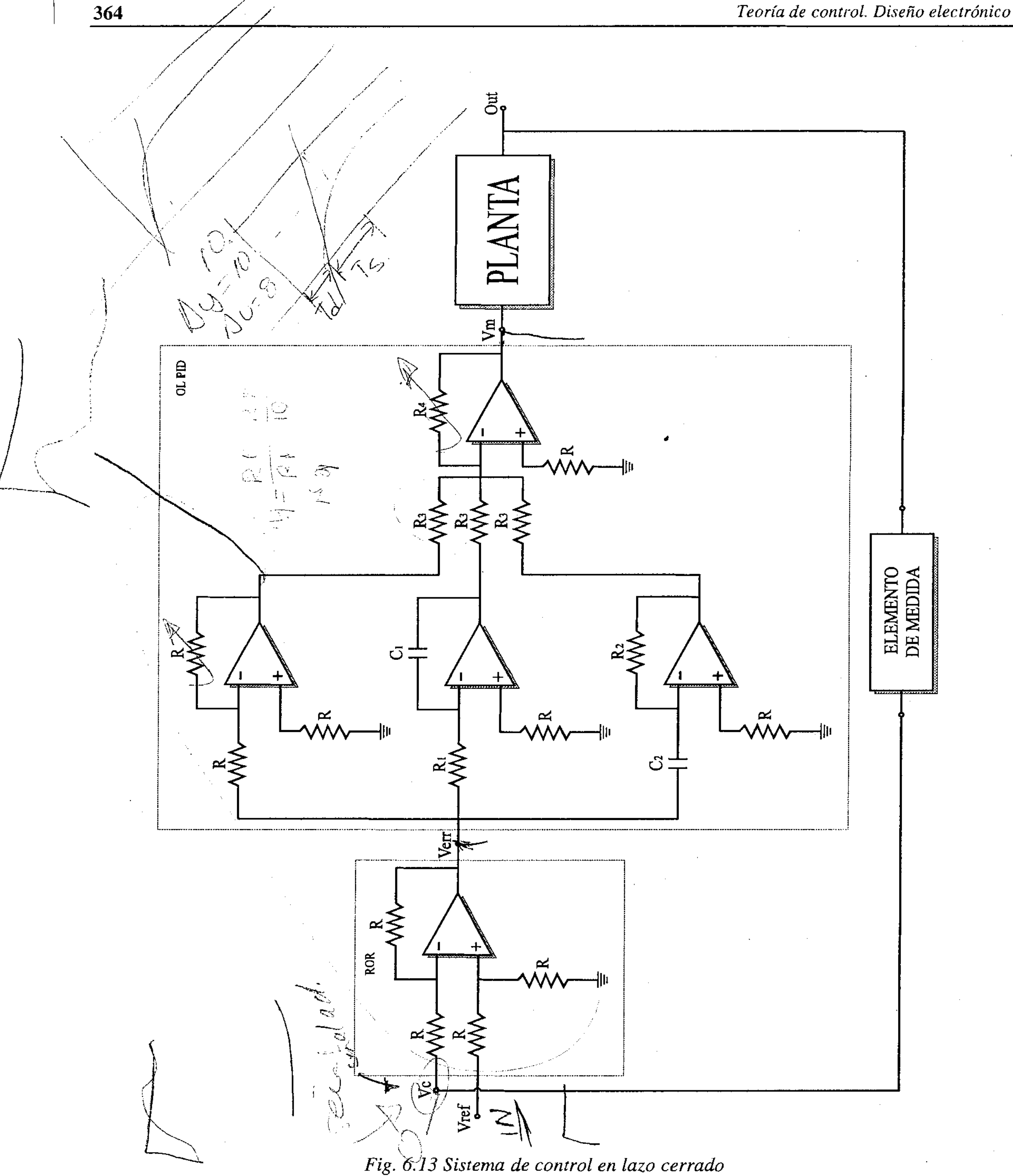


Fig. 6.13 Sistema de control en lazo cerrado

La función de transferencia del control PID vendrá dada por la expresión:

$$\frac{V_m(s)}{V_{err}(s)} = \frac{R_4}{R_3}\cdot\left[1+\frac{1}{R_1 C_1 s}+R_2 C_2 s\right] = K\cdot\left[1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right] \qquad (6.19)$$

6.1.5 Aplicaciones no lineales de los amplificadores operacionales

Hasta el momento hemos trabajado con los amplificadores operacionales bajo el supuesto de que operaban en su zona lineal, además de bajo condiciones de idealidad.

En apartados anteriores se ha comentado que los AO disponen de una zona de saturación cuyo límite vendrá impuesto por las tensiones de alimentación. Estas zonas de saturación, lejos de resultar problemáticas, pueden ser convenientes para el diseño de algunos tipos especiales de control.

6.1.5.1 Control si-no

Un control *si-no* o *todo-nada* está formado básicamente por un comparador. Este es un circuito que compara dos tensiones de entrada y genera una salida relativa al estado de los dos terminales de entrada. La figura 6.14 (a) muestra un circuito comparador básico.

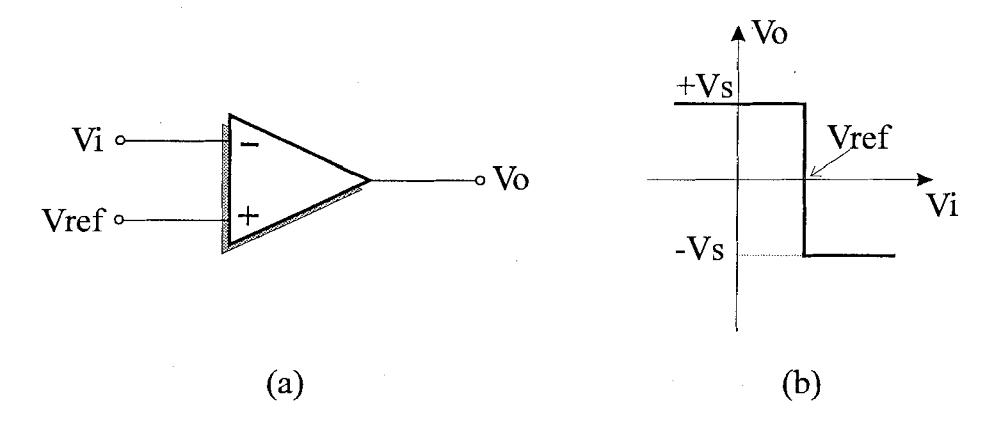


Fig. 6.14 (a) Comparador simple. (b) Características de transferencia

Dado que no existe impedancia de realimentación, el AO opera en lazo abierto. Una entrada puede conectarse a un potencial de referencia, mientras que la otra es la entrada desconocida. La salida del comparador indica si la señal de entrada incógnita está por encima o por debajo del nivel de referencia. En la figura 6.14 (a), la tensión de referencia está conectada a la entrada no inversora, mientras que la señal a comparar se aplica a la entrada inversora. Cuando Vi > Vref, la tensión de salida Vo pasa a ser -Vs, la tensión negativa de saturación. En cambio, para Vi < Vref, Vo = -Vs. Siempre es posible intercambiar las entradas para invertir las salidas.

Una posible aplicación de este tipo de control es como termostato en un sistema de calefacción. Mediante la conversión temperatura-tensión adecuada, podemos comparar la temperatura ambiente con una temperatura de referencia. Si la temperatura ambiente se encuentra por debajo de la de referencia, el estado del comparador cambia, activando la calefacción. En caso contrario, deberá desactivarse.

6.1.5.2 Control si-no con histéresis

Un problema que existe con los controles *si-no* simples, es que, si Vi es una señal ruidosa, Vo fluctuará rápidamente entre +Vs y -Vs. Una solución a este problema es la introducción de una realimentación positiva mediante la conexión, a través de una resistencia, de la salida con la entrada no inversora.

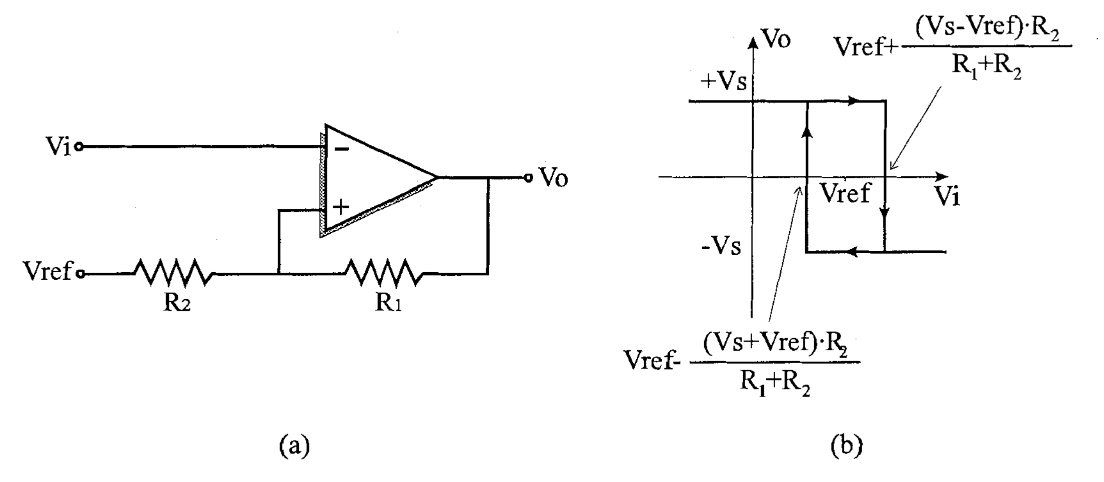


Fig. 6.15 (a) Comparador con histéresis. (b) Características de transferencia

Si suponemos como estado inicial Vo = +Vs, esto implica que $V^+ > V^-$.

$$\left.\begin{aligned} V^- &= Vi \\ V^+ &= Vs\cdot\frac{R_2}{R_1+R_2}+V_{ref}\cdot\frac{R_1}{R_1+R_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Vi < V_{ref}+\frac{(Vs-V_{ref})R_2}{R_1+R_2} \qquad (6.20)$$

Si ahora suponemos Vo = -Vs, esto viene a indicar que $V^+ < V^-$.

$$\left.\begin{aligned} V^- &= Vi \\ V^+ &= -Vs\cdot\frac{R_2}{R_1+R_2}+V_{ref}\cdot\frac{R_1}{R_1+R_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Vi > V_{ref}-\frac{(Vs+V_{ref})R_2}{R_1+R_2} \qquad (6.21)$$

Estos dos valores de Vi, son los que determinarán el ancho del ciclo de histéresis, como puede observarse en la figura 6.15 (b).

6.2 Realización del control discreto mediante microprocesador o microcontrolador

El controlador o compensador discreto aplicado sobre un sistema G(s) se ha representado, tal como muestra la figura 6.15, mediante un muestreador, un mantenedor de datos y el control discreto mismo,

D(z). En realidad esta representación ha sido un modelo útil con el que poder realizar el diseño del controlador o compensador con el objetivo de cumplir una serie de especificaciones determinadas.

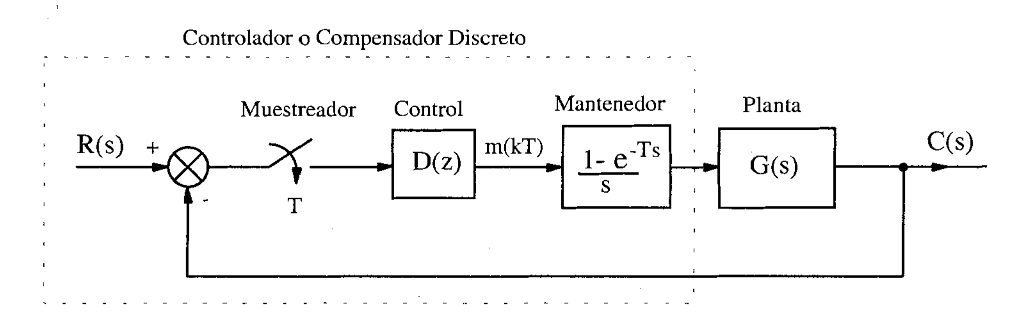


Fig. 6.15

Una vez realizado el diseño del controlador discreto, su implementación se puede llevar a cabo mediante un microprocesador, un procesador digital de señal (DSP, *Digital Signal Processor*) o un microcontrolador, cuya elección no es sencilla debido a los costos de las herramientas de soporte hardware y software imprescindibles en el desarrollo de un sistema basado en microprocesador, en microcontrolador o en DSP.

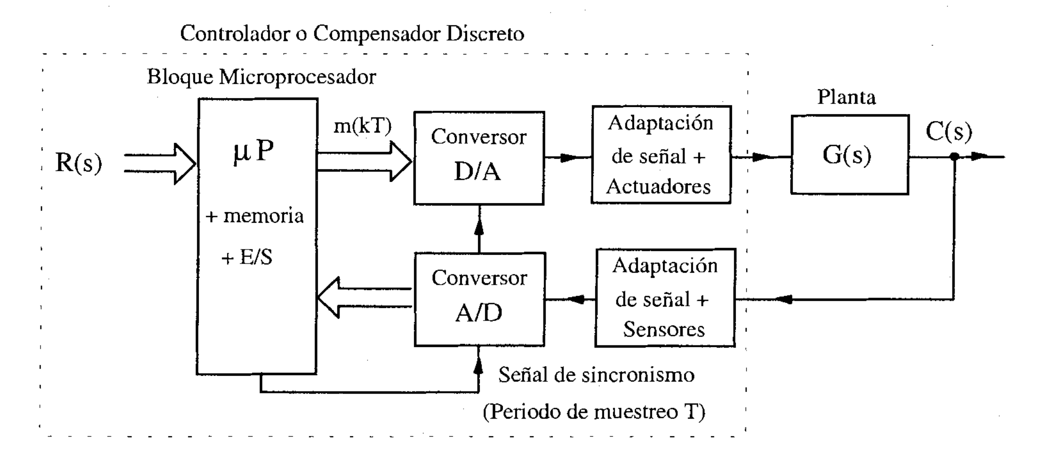


Fig. 6.16

La figura 6.16 muestra el diagrama de bloques básico para la realización de un controlador o compensador discreto. En esta figura se pueden distinguir : un bloque microprocesador, conversores analógico/digital (A/D) y digital/analógico (D/A), bloques con adaptación de señal, actuadores y sensores, y una señal de sincronismo que establece el periodo de muestreo T del sistema de control. En este diagrama de bloques, el control D(z) lo realiza el microprocesador mediante la ejecución de un algoritmo discreto, por lo que es imprescindible que el microprocesador tenga una memoria que albergue este algoritmo, aunque también debe disponer de algunos periféricos de entrada/salida (E/S) que hagan de interfaz con los conversores A/D y D/A, y además es importante que tenga uno o varios temporizadores que le permitan generar una señal de sincronismo con la que tener un periodo de

muestreo T preciso.

El microprocesador, la memoria, los periféricos de E/S y la generación de sincronismo se han agrupado en lo que se denomina como "bloque microprocesador" de la figura 6.16. La entrada R(s), si es analógica, se debe convertir a una entrada digital, puesto que se debe utilizar por el microprocesador, aunque R(s) puede ser una entrada interna, es decir, R(s) puede ser una secuencia de cambios a seguir impuesta por el programa del microprocesador. Los actuadores que se pueden utilizar en el sistema de control vendrán determinados por la constitución de la planta[1], lo mismo ocurre con los sensores, que serán los adecuados a la magnitud de la salida C(s) del sistema.

El diagrama de bloques de la figura 6.16 se debe implementar con un microprocesador, microcontrolador o con una DSP. En la actualidad, la implementación más costosa de realizar es la de un microprocesador, puesto que requiere que se le añada prácticamente todos los dispositivos que están incluidos en la figura, es decir, se debe implementar, aparte de los actuadores, sensores y la adaptación de señal, que son inherentes al microprocesador, microcontrolador y DSP, memorias, periféricos de E/S, temporizadores para realizar el sincronismo y los conversores A/D y D/A; mientras que la realización con un microcontrolador o una DSP es más sencilla por llevar incorporados dentro del mismo circuito integrado la mayor parte de los periféricos mencionados, incluyendo los conversores A/D y D/A. Este hecho hace que la implementación de sistemas de control discreto se efectúe con las DSP o con los microcontroladores disponibles en el mercado electrónico, debido a que simplifican enormemente tanto el hardware a emplear como los costos de desarrollo de la aplicación.

En cuanto a los microcontroladores, existe una gran variedad de modelos y fabricantes distintos en el mercado actual, lo que en principio puede suponer una difícil elección para el diseñador. Según la figura 6.16, es importante que el microcontrolador escogido sea lo más completo posible, con el propósito de simplificar al máximo la circuitería necesaria en la implementación del control. El microcontrolador es conveniente, pues, que incorpore la memoria necesaria para el programa desarrollado como para los datos que ésta maneja, capacidades de entrada/salida (E/S) suficientes para enviar datos al conversor D/A como para recibirlos del conversor A/D, varios temporizadores para sincronizar y habilitar los conversores empleados y algunas líneas de E/S de propósito general.

Cada fabricante dispone, dentro de una variada gama de modelos, de algún microcontrolador que se ajusta a estos requisitos. Por ejemplo, Intel dispone de varias gamas o familias de microcontroladores de 8 y de 16 bits que cumplen con estos requisitos. Estas familias son la MCS-51 de 8bits y la MCS-96 de 16 bits, aunque el fabricante dispone de una nueva familia la MCS-251 de 8 bits que representa una mejora y actualización de la MCS-51.

La familia de microcontroladores MCS-51 tiene en la línea de los requisitos mencionados las siguientes características

[1]Por ejemplo, en un motor de continua el actuador es una etapa de potencia que suministra la corriente al motor. En un horno de gasoil el actuador podría ser el accionamiento de la válvula de combustible, etc.

- Versiones con 4k o 8kbytes de memoria EPROM y ROM. (87C51FA y 87C51FA).
- Memoria RAM interna (hasta un máximo de 256 bytes)
- 4 puertos de E/S de 8 bits cada uno.
- 2 temporizadores/contadores de 16 bits cada uno.
- 5 fuentes de interrupción enmascarables, con 2 niveles de prioridad.
- Salida de Modulación de Anchura de Pulsos PWM (8XC51FA, FB y FC)

La MCS-51 no tiene conversor A/D ni D/A incorporados, por lo que se deben conectar de forma externa al microcontrolador. En este sentido, se pueden utilizar los puertos del microcontrolador para enviar y recibir datos de los conversores A/D y D/A, además de las líneas de control para indicar el inicio de la conversión de datos en el A/D, recepción de interrupción cuando el A/D a finalizado la conversión, extracción de dato por el D/A, etc. La modulación de anchura de pulsos PWM del microcontrolador podría emplearse como conversor D/A, aunque sólo sería útil en algunos sistemas específicos. Cabe destacar que los microcontroladores de la MCS-51 también los suministran otros fabricantes distintos de Intel[2], como es el caso del fabricante Siemens, que ofrece el microcontrolador SAB80C515A con las características esenciales mencionadas y, además, incorpora 2 puertos más de E/S de 8 bits, lo que hace un total 6 puertos de E/S, y un conversor A/D de 10 bits. Por tanto, es posible encontrar la opción más adecuada para la aplicación deseada en cualquier microcontrolador que estos fabricantes ofrecen en el mercado.

En la MCS-51 es importante tener en cuenta que, si se utiliza un microcontrolador de la familia sin memoria EPROM interna donde albergar el programa del sistema de control, se deberá emplear memoria externa con este propósito, por lo que los puertos P0 y P2 del microcontrolador deben hacer las funciones de bus de datos y bus de direcciones, lo que supone la pérdida de estos puerto como puertos de E/S y, por tanto, se debe utilizar más hardware externo para controlar los conversores A/D y D/A.

Considerando el microcontrolador SAB80C515A de Siemens y que éste incorpora 6 puertos E/S y un conversor A/D de 10 bits, la figura 6.17 muestra su utilización como controlador discreto de un sistema. El puerto P6 del SAB80C515A está conectado a un multiplexor analógico interno, de manera que cualquier patilla de este puerto de 8 bits se puede emplear como entrada del conversor A/D. En la figura 6.17 se emplea la patilla P6.0 (patilla 0 del puerto 6) como entrada de señal para el A/D.

En la figura 6.17 se utiliza el puerto P4 por completo, 8 bits, como salida de datos para el conversor D/A, mientras que el puerto P5 se utiliza para hacer el control del convertidor D/A. Como convertidor D/S se puede utilizar el circuito integrado DAC0832, que es un convertidor de 8 bits con salida de corriente diferencial, por lo que necesita de un amplificador operacional para convertir la corriente de

[2] Esta familia de microcontroladores también la fabrican Atmel Corporation, Dallas Semiconductor, OKI Semiconductor, Philips Semiconductors (Signetics), Siemens Components, etc.

salida en tensión de salida. En este convertidor, fig. 6.18, se puede poner las señales de *Chip select* ($\overline{CS}$), de *Internal Latch Enable* (ILE) y de *Transfer* ($\overline{XFER}$) permanentemente habilitadas, de forma que la conversión se realiza mediante la habilitación consecutiva de las señales WR1 y WR2. El circuito pertinente se muestra en la figura 6.18.

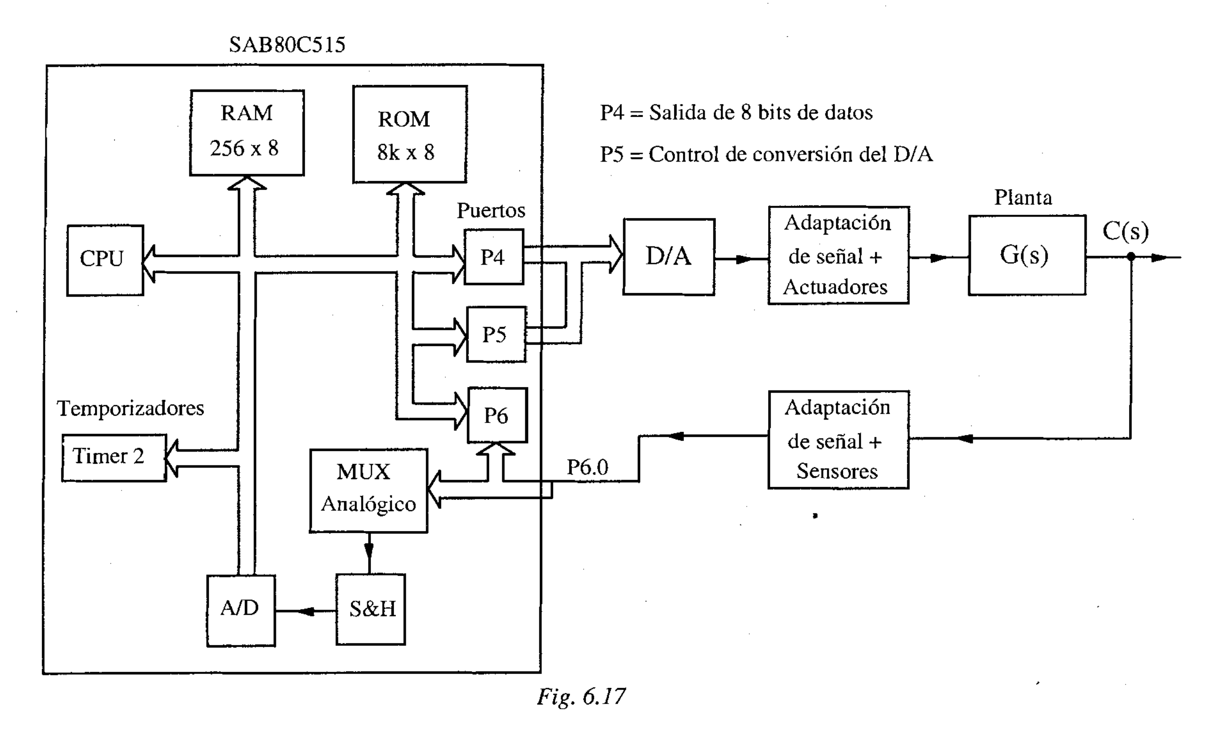


Fig. 6.17

Fig. 6.18

En el sistema de control es necesario generar un periodo de muestreo T con un grado de precisión determinado; con este fin se puede utilizar el temporizador de 16 bits Timer 2 del microcontrolador.

Este temporizador tiene varios modos de funcionamiento, siendo el modo de "autorrecarga" el más adecuado para crear el sincronismo que proporcione la base del periodo de muestreo.

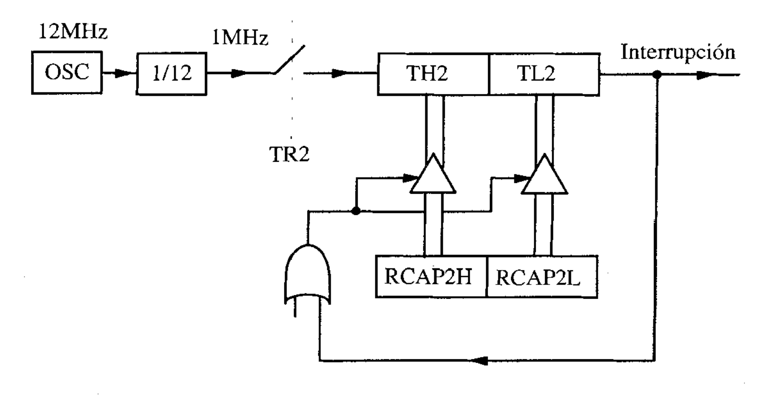


Fig. 6.19

La figura 6.19 muestra el diagrama de bloques del temporizador Timer 2 en modo de autorrecarga. Los registros del temporizador son TH2 (byte alto) y TL2 (byte bajo), los registros RCAP2H y RCAP2L son registro de 8 bits donde se almacena el valor de "recarga" del temporizador. El Timer 2 se puede conectar a la señal de reloj del microcontrolador, que habitualmente tiene un cristal de cuarzo de 12 MHz. Esta señal es dividida por 12, por lo que la base del temporizador es una señal de 1 MHz de frecuencia. El bit TR2 (*Timer Run 2*) es un bit que está albergado en uno de los registros que controlan el modo de funcionamiento del temporizador, y mediante su estado se controla un interruptor que conecta la señal de 1MHz al temporizador, de manera que éste comienza a contar desde el momento que TR2 es activado. Cuando el temporizador está en funcionamiento, el valor de TH2 y TL2 va incrementándose hasta llegar a su valor máximo (TH2 = FFH y TL2 = FFH) de rebasamiento (*Overflow*), lo que de forma automática genera una interrupción al microcontrolador y, al mismo tiempo, se emplea esta señal para activar la recarga de TH2 y TL2 con los valores de los registros RCAP2H y RCAP2L, respectivamente. Esta recarga, pues, se realiza de forma automática, por lo que el temporizador generará una secuencia de interrupciones periódica, con un periodo que depende del valor a que se pongan los registros RCAP2H y RCAP2L antes de poner en funcionamiento el temporizador. Cada una de la interrupciones generadas debe llamar a una subrutina que realice el proceso de conversión de los convertidores A/D y D/A.

Según la figura 6.19, si el periodo de muestreo debe ser de 1 mseg, considerando que a 1MHz el periodo de la señal base para el temporizador es de 1 μseg, el valor que los registros de recarga RCAP2H y RCAP2L debe ser tal que cada vez que el temporizador cuente 1000 pulsos genere una interrupción, lo que implica que RCAP2H=FCH y RCAP2L= 17H, es decir, el temporizador comenzará a contar desde la posición de recarga (TH2= FCH y TL2 = 17H) e irá incrementándose hasta llegar a rebasamiento (TH2 = FFH y TL2=17H), lo que causará una interrupción y la autorecarga de RCAP2H y RCAP2L en TH2 y TL2, respectivamente.

En la figura 6.17, en lugar del microcontrolador SAB80C515 se puede utilizar un microcontrolador de 16 bits de la familia MCS-96, puesto que estos microcontroladores también incorporan un conversor

A/D interno de 10 bits, con un multiplexor analógico de 8 canales también. Las características principales de esta familia de microcontroladores son:

- Versiones con 8k o 16kbytes de memoria EPROM.
- Memoria RAM interna.
- 5 puertos de E/S de 8 bits cada uno.
- 2 temporizadores/contadores de 16 bits cada uno.
- 20 fuentes de interrupción.
- Convertidor A/D de 10bits con S/H.
- Multiplexor analógico de 8 canales.
- Salida de modulación de anchura de pulsos PWM.
- 232 registro internos.

Los microcontroladores de la familia MCS-96 se pueden utilizar, de forma similar a la del SAB80C515 en el esquema de la figura 6.17, con la ventaja de ser un microcontrolador de 16 bits y las mayores prestaciones de computación que representa.

6.3 Autómatas programables.

Un autómata es un equipo electrónico programable en el la arquitectura, el sistema operativo y el lenguaje de programación están diseñados para controlar, en tiempo real y en un ambiente industrial, procesos secuenciales. De esta forma un autómata programable dispone de un sistema de exploración cíclico de las entradas y salidas, de una rápida resolución de operaciones lógicas y aritméticas sencillas y de un lenguaje de programación fácil.

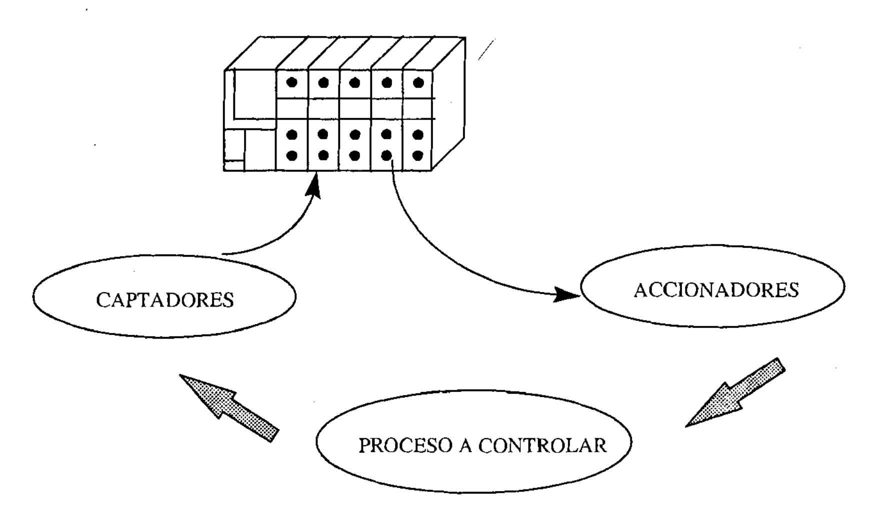


Fig. 6.20 Lazo de control mediante un autómata programable.

6.3.1 Evolución de los autómatas programables.

En la mitad de la década de los años 60, la empresa General Motors se preocupa por los elevados costes de los sistemas de control a base de relés, la poca flexibilidad para adaptarse a las necesidades de producción y el elevado tiempo de averías. Esto hace que General Motors contacte con Digital Corporation para la búsqueda de un sistema de control que solventase estos problemas y que respondiera, entre otros, a los siguientes requerimientos:

- Adaptación al medio industrial.
- Sistema programable en lenguaje asequible al personal de operación y mantenimiento de la planta.
- Fácil mantenimiento, reutilizables y de alta fiabilidad.

De este modo nace el primer autómata programable que utilizaba memoria de ferritas y un procesador cableado a base de integrados, constituyendo la CPU. Su utilización se centró en la sustitución de los armarios de relés que controlaban procesos típicamente secuenciales.

En la década de los años 70 se incorpora la tecnología del microprocesador, lo que permite aumentar las prestaciones:

- Operaciones aritméticas y manipulación de datos.
- Entradas y salidas analógicas. Control de posicionamiento.
- Comunicación con ordenadores y periféricos.
- Mejora de los lenguajes de programación.

Las aplicaciones se extienden al control de procesos , ya que gracias a las entradas y salidas analógicas se pueden realizar lazos de regulación en procesos continuos y no puramente secuenciales.

En la década de los 80 se incorporan masivamente las mejoras de la tecnología de los microprocesadores consiguiendo:

- Altas velocidades de respuesta y reducción de las dimensiones.
- Aparición de módulos inteligentes (PID)
- Lenguajes gráficos de programación.
- Mayor capacidad de diagnosis de funcionamiento.

En la primera mitad de la década de los 90 aparecen diversas tarjetas inteligentes para procesos específicos y diversos entornos de software para gestionar el funcionamiento de los autómatas y el proceso de la planta, así como una total integración del autómata en las redes informáticas.

En cuanto a la capacidad de direccionamiento de entradas y salidas, los fabricantes han desarrollado diversas familias que comprenden equipos que van desde 10 E/S, para pequeñas aplicaciones y a unos precios bajos, a grandes equipos capaces de controlar 10000E/S, para grandes procesos industriales, aunque la tendencia es a distribuir el control del proceso mediante una red de autómatas.

6.3.2 Funcionamiento del autómata.

Los autómatas utilizan un procesador para gestionar una serie de instrucciones, mediante las cuales se especifican las acciones de control necesarias en función del estado de las variables del sistema. El hecho de poseer un único procesador hace que las instrucciones se ejecuten de manera secuencial, aunque a una gran velocidad. Estas instrucciones son almacenadas en una memoria que se denomina memoria de programa. Por otro lado, los datos de entrada y salida son almacenados en otra zona de memoria reservadas, a las cuales se les suele denominar *imágenes del proceso*.

6.3.2.1 Estructura interna de un autómata.

Los autómatas programables poseen una gran diversidad de estructuras internas en función del fabricante, pero de forma general se pueden distinguir los siguientes bloques:

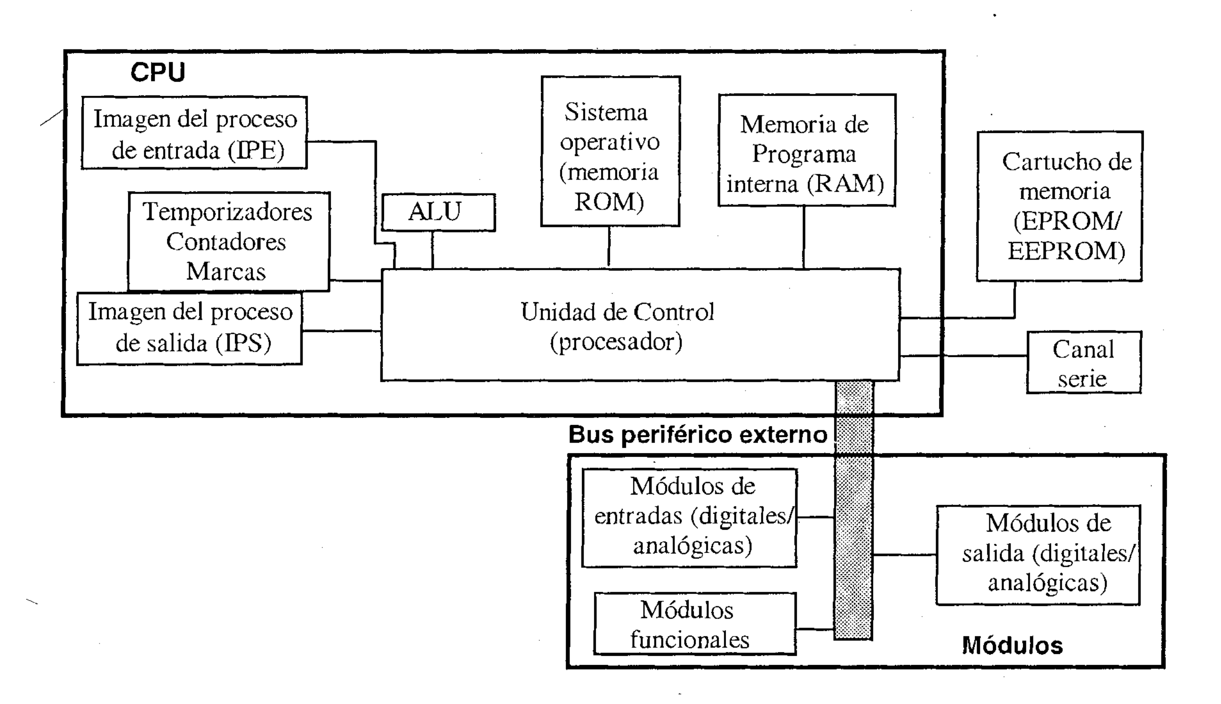


Fig. 6.21 Estructura interna de un autómata programable

- *Memoria de programa*: El programa de mando se ubica en la zona de memoria RAM, la cual posee la característica de que su contenido se puede modificar rápidamente, pero si falla la alimentación y no hay batería tampón, se pierde dicho contenido. Para conservar un programa del autómata a prueba de fallos de alimentación, existe la posibilidad de transferirlo a un cartucho de memoria EPROM o EEPROM.

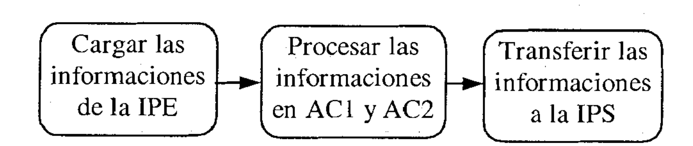
- *Sistema Operativo (Memoria ROM):* El sistema operativo incluye los programas de sistema que fijan la ejecución del programa de usuario, la gestión de entradas y salidas, el reparto de la memoria, la gestión de datos y similares. El sistema operativo es fijo y no se puede modificar.

- Imágenes de proceso: Los estados de señal de los módulos de entrada y salida se depositan en la CPU dentro de las denominadas "Imágenes de proceso". Son zonas reservadas de memoria RAM. Para módulos de entrada y salida existen imágenes separadas, imagen de proceso de las entradas (IPE) e imagen de proceso de las salidas (IPS).

- Conector canal serie de comunicación: En él se conectan los aparatos de programación, operación y observación. En la mayoría de los autómatas es posible formar una red local por medio de esta vía.

- Temporizadores, contadores y marca: Los temporizadores y contadores pueden cargarse, borrarse, arrancarse y pararse desde el programa. Los valores de tiempo y cuenta se almacenan en zonas reservadas de la memoria RAM. Otra zona de la memoria RAM permite almacenar información, por ejemplo resultados intermedios, en calidad de marcas.

- Unidad aritmética y lógica (ALU): La unidad aritmética y lógica se compone de uno o dos acumuladores (AC 1 ó AC 2) que procesan las operaciones por bytes y por palabras.



- Unidad de control: Siguiendo el programa, llama sucesivamente a las instrucciones contenidas en la memoria y las ejecuta. La estructura típica de una unidad de control queda reflejada en la figura 6.22.

- Bus periférico externo: El bus periférico externo constituye la vía eléctrica por la que se intercambian todas las señales entre la CPU y los módulos externos. Existe un abanico muy amplio de módulos externos, ya sean de entradas, salidas y funcionales, con diferentes características para adaptarse lo mejor posible a nuestra aplicación de control.

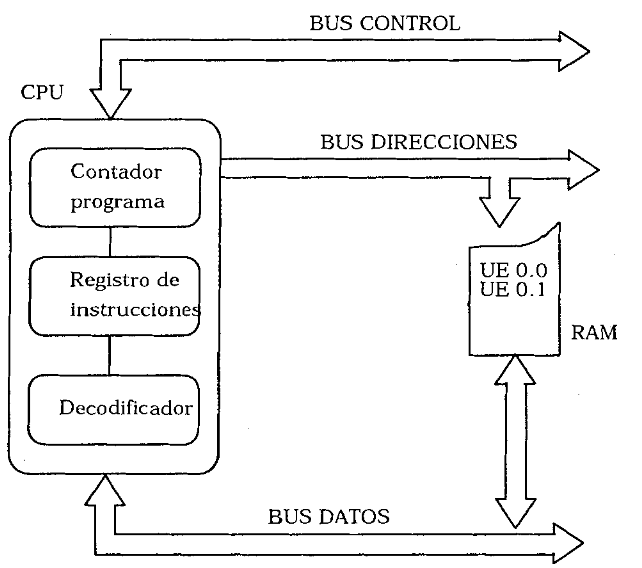


Fig. 6.22 Estructura de la unidad de control.

6.3.2.2 Ciclo de datos.

La principal función del procesador de un autómata programable es la lectura y ejecución de las instrucciones del programa de usuario, mediante la utilización de los estados de las entradas, salidas y variables internas del sistema. La mayoría de los autómatas actuales efectúan esta tarea de forma cíclica y para ello antes de cada ejecución del programa el bus periférico externo transporta a la IPE los datos actuales de los módulos de entrada. Simultáneamente se pasan a los módulos de salida los datos contenidos en la IPS.

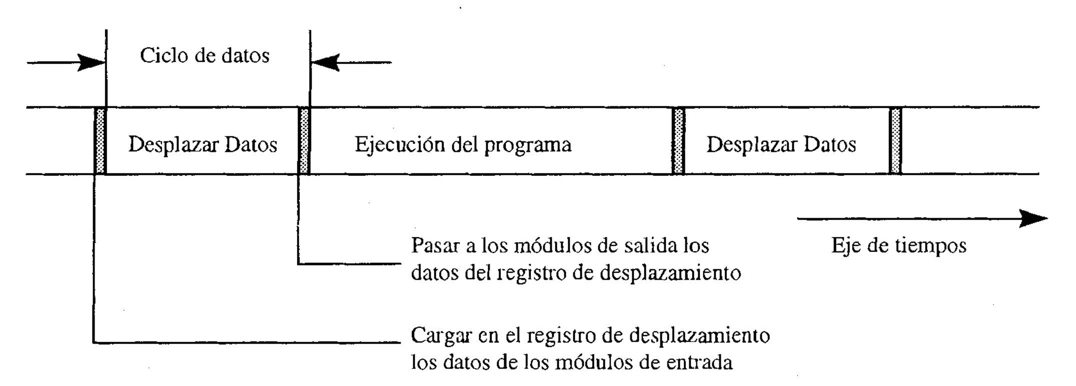


Fig.6.23 Ciclo de datos.

Como medida de seguridad, existe una vigilancia del ciclo que desconecta el autómata en caso de error del sistema (perro guardián o *watch dog*).

6.3.3 Lenguajes de programación.

En los autómatas programables (PLC), las tareas de automatización se formulan en programas de mando. En ellos, el usuario fija mediante una serie de instrucciones cómo el autómata debe mandar o regular la instalación. Existen diversos lenguajes de programación en función del fabricante del autómata programable, pero se puede distinguir en todos ellos tres formas básicas de representación que son : esquema de contactos, lista de instrucciones y diagrama de funciones.

6.3.3.1 Lista de instrucciones.

Esta forma de representación del programa consiste en un conjunto de códigos simbólicos que corresponden a instrucciones de lenguaje máquina. Es un lenguaje indicado para usuarios familiarizados con la informática. Además este lenguaje es el único utilizable por las unidades de programación sencillas, que solo visualizan una o varias líneas de programa simultáneamente. La estructura que suelen tener estas instrucciones es :

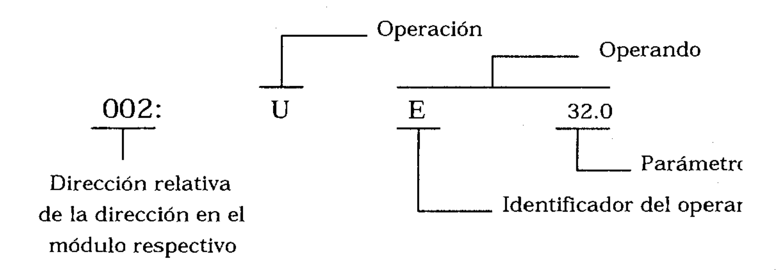


Fig. 6.24 Estructura de una instrucción para un automata Siemens-Simatic S5.

6.3.3.2 Diagrama de funciones.

Consiste en un lenguaje simbólico, en el que las diferentes combinaciones entre variables se representan por medio símbolos lógicos. Este lenguaje de programación esta especialmente indicado para usuarios familiarizados con la electrónica digital.

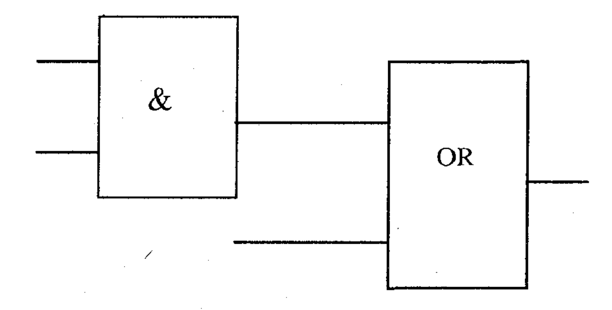


Fig. 6.25 Diagrama de funciones

6.3.3.3 Esquema de contactos.

En este tipo de lenguaje, las funciones de mando se representan mediante un esquema con simbología circuital, y está especialmente indicado para técnicos que estén habituados a diseñar sistemas de control a base de relés. La simbología utilizada por la mayoría de lenguajes es la correspondiente a la convención americana, según normas NEMA para la representación de esquemas eléctricos.

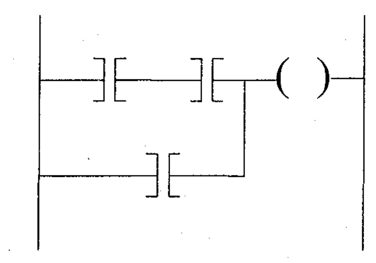


Fig.6.26 Esquema de contactos.

6.3.4 Tipos de instrucciones

El conjunto de instrucciones de los autómatas programables se va ampliando continuamente con nuevas y más complejas instrucciones específicas de las nuevas aplicaciones que se van incorporando, como lazos de regulación PID o lazos de control de lógica difusa. De forma general, en el conjunto de instrucciones del autómata se pueden considerar los siguientes grupos:

- Instrucciones binarias: Son las instrucciones que definen, en el lenguaje utilizado, los operadores lógicos de Boole AND, OR, así como los equivalentes negados.

- Instrucciones de memorias: Instrucciones que permiten memorizar el resultado de la combinación obtenido por el procesador. Habitualmente se utilizan básculas S-R o R-S.

- Instrucciones de temporización y contaje: Son instrucciones que generan una variable donde la activación o desactivación de la misma está en función del tiempo o del número de pulsos.

- Instrucciones aritméticas y de comparación: Generalmente forman parte de estas instrucciones las operaciones básicas *suma, resta, mayor, menor e igual.* Procesadores más potentes incluyen operaciones como *multiplicación, división, utilización de la notación en coma flotante*, etc.

- Instrucciones de transferencia y manipulación de datos: Es necesario disponer de instrucciones que permitan trasladar o copiar uno o varios datos contenidos en los registros de la memoria de datos a otros registros de la misma memoria, o bien, en un conjunto de variables numéricas.

- Instrucciones de control del ciclo de ejecución: Estas instrucciones permiten alterar la ejecución secuencial de las instrucciones del programa de control por medio de saltos condicionales o incondicionales a determinadas secciones del programa principal para realizar secuencias de instrucciones denominadas *subrutinas*.

- Instrucciones de comunicación: Estas instrucciones permiten la transferencia de información entre dos autómatas, o bien, hacia una impresora u ordenador personal (PC). La comunicación se realiza habitualmente por medio de un canal de comunicación serie.

6.4 Sistemas de instrumentación y control basados en ordenador

Los ordenadores han pasado a ser de gran utilidad, en algunos casos imprescindibles, dentro de las áreas tecnológicas y científicas. El campo de la instrumentación y el control no es ninguna salvedad al respecto y, de este modo, las computadoras (ordenadores personales, estaciones de trabajo, etc.) aparecen en cualquier puesto de trabajo relacionado con este campo en continua evolución. Dentro del área de la instrumentación y el control el ordenador aparece como el centro del sistema de instrumentación encargado de extraer la información de utilidad del mundo físico que se desea estudiar: es el encargado de realizar la gestión de las tareas especificas para el control de la adquisición de las señales (realización de consignas y órdenes, multiplexación temporal, etc.), de la interficie con el usuario (comunicación, visualiación y presentación de resultados), así como el elemento extractor de la información de las señales obtenidas mediante el procesado apropiado. El procesado, de este modo, es el método mediante el cual el ordenador consigue la información a partir de las medidas realizadas en el mundo físico y mediante un sistema de instrumentación.

El sistema de instrumentación se compondrá de las siguientes partes:

a) Ordenador

b) Transductores

c) Actuadores

d) Acondicionadores de señal

e) Circuitería de adquisición de datos

f) Circuitería de análisis de datos

g) Control

h) Software de instrumentación

En las partes anunciadas destacan las dos últimas: control (g) y software de instrumentación (h), que merecen una descripción más detallada.

En la figura 6.27 se muestra un diagrama de bloques de un sistema de instrumentación. Debe indicarse que existen diversas posibilidades de variación sobre el sistema trazado, la más importante de todas ellas viene dada por el hecho de la posible existencia de una implementación mediante software del control (algoritmo de control), en lugar de la implementación externa al ordenador como se ha propuesto en este caso concreto.

PERTURBACIONES
SISTEMA
SENSOR
SEÑAL
ACONDICIONAMIENTO DE SEÑAL
ORDENADOR
SOFTWARE DE INSTRUMENTACIÓN
CIRCUITERIA DE ADQUISICIÓN DE DATOS
CIRCUITERIA DE ANÁLISIS DE DATOS
VISUALIZACIÓN
OPERADOR HUMANO
ACTUADOR
ACONDICIONAMIENTO DE SEÑAL
CONTROL

Fig. 6.27 Diagrama de bloques de un sistema de instrumentación y control.

6.4.1 Sistemas de control

Tradicionalmente se han utilizado los sistemas de instrumentación para la obtención de información de las señales medidas del mundo físico. La alta capacidad de tratamiento de información y la potencia de cálculo de los procesadores actuales permite que los sistemas de instrumentación admitan en determinados casos la utilización de la información obtenida para poder actuar sobre el sistema físico. En este caso, fig. 6.27, se efectúa una acción de control al existir una realimentación de señal sobre el sistema físico.

El método o proceso mediante el cual el sistema de instrumentación obtiene la información determina el tipo de procesado que se utiliza (por ejemplo, procesado en dominio temporal y procesado en dominio frecuencial). Existirá, normalmente, un preprocesado de la señal medida con el objetivo de eliminar o reducir las componentes indeseables de alta frecuencia o, simplemente, para realizar determinadas operaciones algebraicas previas al procesado. La diferencia más importante entre el control y el procesado viene determinado por el uso que recibe la información de la señal procesada; así el control básicamente consiste en un procesado simple de la señal medida conjuntamente con una señal consigna o referencia que, normalmente, es generada por el propio algoritmo de control. En el caso del realizar un control, la señal obtenida tras este procesado es acondicionada y mediante un actuador modifica la dinámica del sistema físico. De este modo, si existe un buen diseño del controlador, el sistema físico ofrece una buena respuesta cumpliendo las especificaciones dinámicas y estáticas requeridas.

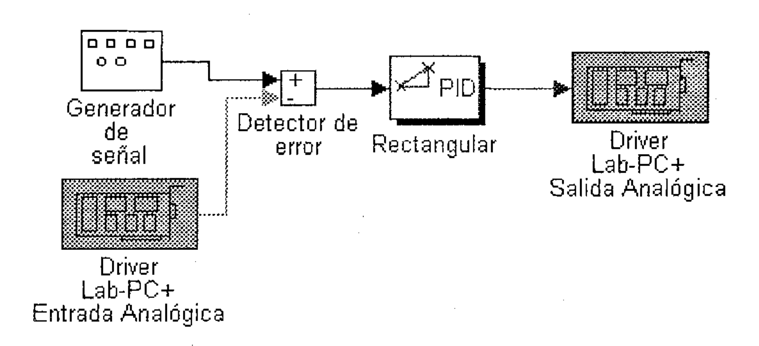


Fig..6.28 Panel frontal del controlador del sistema externo.

La figura 6.28 muestra un algoritmo de control realizado mediante el software MATLAB, donde se pueden observar la programación gráfica que caracteriza al software de instrumentación, el controlador y las drivers necesarios para realizar la comunicación con la targeta de adquisición.

Las características más importantes del sistema de control, implementado en las plataformas que constituyen los sistemas de instrumentación basados en ordenador, vienen determandas por la facilidad de programación y la versatibilidad del software realizado (facilidad de modificación, actuación directa sin necesidad de realizar compilado del programa de control, visualización de resultados, parámetros y variables, comunicación externa, etc.).

Sin embargo, debe seleccionarse cuidadosamente esta alternativa de implementación en función del periodo de muestreo requerido al sistema de control. El control del proceso se debe realizar en lo que se denomina control en tiempo real, esto es, no deben existir retardos apreciables en la reacción del procesador ante eventos externos. Tal y como se ha visto en capitulos anteriores, estos retardos deben compararse con las constantes de tiempo características del sistema físico que se desea controlar. Así, debe seleccionarse adecuadamente la frecuencia de actuación de la señal de control y, ésta tiene un valor máximo limitada por el periodo de ejecución del algoritmo de control por parte del ordenador. Este es un punto relevante porque, en conclusión y debido a que la carga gráfica del algoritmo ralentiza substancialmente su ejecución, a persar de poseer un software con gran flexibilidad (comunicación externa alta resolución gráfica), en algunas aplicaciones se requieren algoritmos de control muy sencillos necesarios para lograr una frecuencia de muestreo suficiente para los requerimientos del sistema que se debe controlar.

Como ejemplo, puede indicarse que en el software de instrumentación LabWindows/CVI puede capturarse un array de muestras a 60 Kmuestras/seg. con una targeta LabPC+, modo de captura multimuestra, de modo que pueden procesarse con mucha eficacia señales complejas debido a su elevada capacidad de cálculo y a la cantidad de algoritmos de procesado existentes. Sin embargo, si debe realizarse una transferencia muestra a muestra, la velocidad de muestreo queda muy limitada, dado que debe ejecutarse el algoritmo entre cada muestra de salida, lo cual implica utilidad en sistemas lentos.

6.4.2 Software de instrumentación

A partir de la descripcción realizada previamente parece necesaria el uso de un entorno adecuado para gestionar los diferentes pasos requeridos en el sistema de instrumentació. Este elemento es el software de instrumentación. Dos características son exigibles en un software de instrumentación:

- Debe ser capaz de controlar todo el sistema (instrumentos, drivers, comunicación serie, interficie con el usuario, control, etc.).
- Debe permitir el diseño personalizado de un instrumento. Dicho instrumento se denominará instrumento virtual.

El software de instrumentación, de este modo, gestiona los procedimientos requeridos para realizar la medida (enviar órdenes a los instrumentos para que éstos ofrezcan las señales de test y capturen las

señales resultantes del proceso), gestiona aquellos procedimientos necesarios para realizar una actuación sobre el sistema físico (si se realiza un control del mismo) y procesa las señales obtenidas para obtener la información objeto de la instrumentación.

Con el objetivo de facilitar y flexibilizar la generación y desarrollo de la aplicación resultado del software de instrumentación, aparecen plataformas de soporte con rútinas y herramientas encaminadas al control de la instrumentación. Este conjunto de herramientas determina lo que se conoce como instrumentación virtual. Entre estos software pueden destacarse el LABVIEW, el LabWindows/CVI y el HP-VEE. Una de las principales diferencias entre la instrumentación virtual y el software de programación generico viene determinada por la diferencia de programación, siendo ésta altamente gráfica en el primer caso. La estructura típica de un software de instrumentación virtual consta de los módulos:

- Interficie gráfica
- Programa de control
- Adquisición de datos
- Análisis de datos

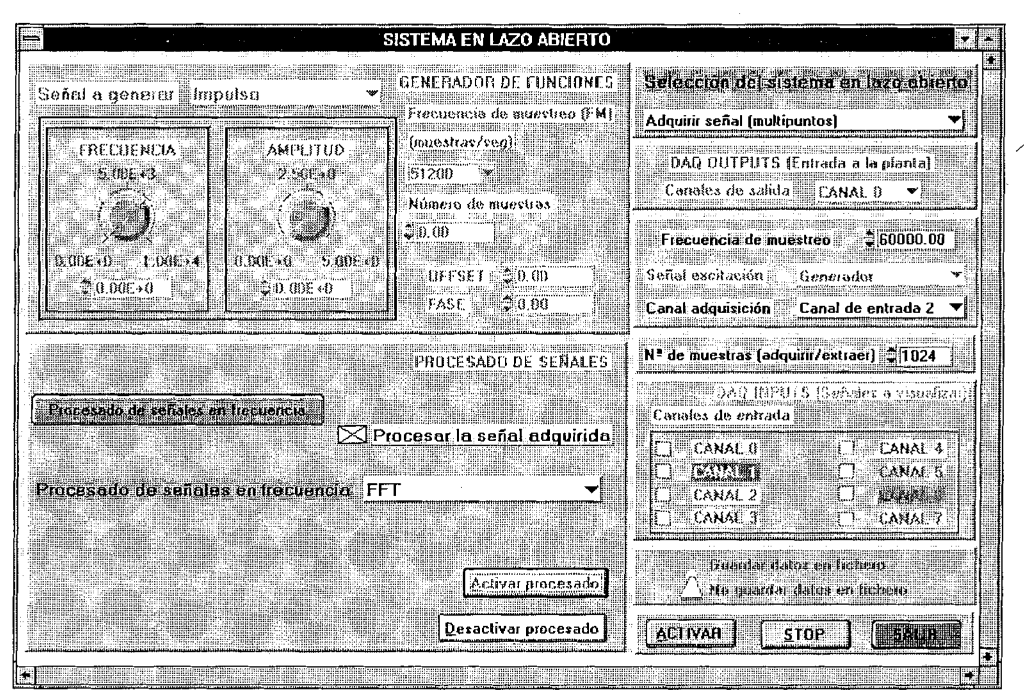


Fig. 6.29 Panel frontal de un instrumento virtual

Al finalizar el desarrollo de la programación se obtiene la aplicación resultante denominada instrumento virtual. La figura 6.29 muestra el aspecto de un instrumento virtual generado mediante LabWindows/CVI. Funcionalmente existen dos paneles diferentes: el panel frontal (que representa el instrumento virtual) y el panel de programación (donde se programa el instumento virtual mediante técnicas gráficas). Un instrumento virtual, de este modo, no es más que un módulo de software que intenta simular todos los aspectos funcionales de un instrumento real; cuando se ejecuta un programa que representa un instrumento virtual, el usuario ve en la pantalla el panel que se corresponde con el instrumento físico y permite la visualización y el control.

Para la construcción de un panel frontal, se dispone de un libreria de controles, indicadores, gráficos, etc, existiendo la posibilidad de que el usuario genere sus propios elementos. Como ejemplo, puede observarse, en la figura 6.30, el instrumento virtual denominado PID que ofrece el software de instrumentación LABVIEW.

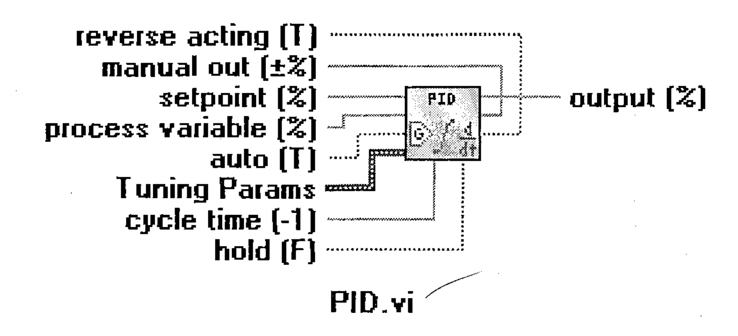


Fig. 6.30 Instrument virtual PID de LabVIEW

6.4.3 Ejemplo de aplicación

Para mostrar la utilidad de la instrumentación virtual en el campo del control, se ha realizado una experiencia consistente en el control de un motor de corriente continua mediante el software de instrumentación LABVIEW.

Para lograr este propósito es necesario detectar la velocidad de giro del motor y, para ello, se utiliza un sensor de efecto Hall, tal y como muestra la figura 6.31.

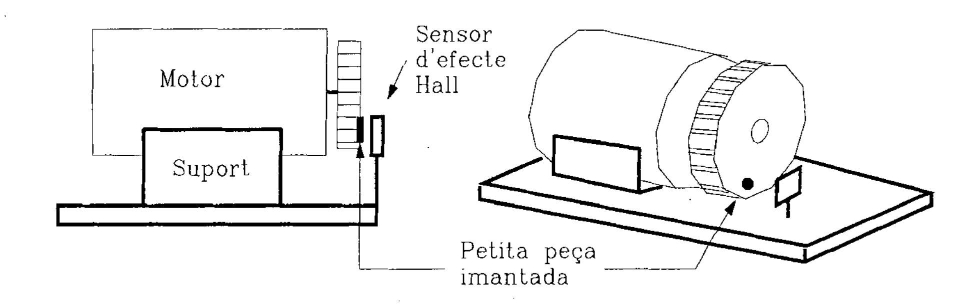


Fig. 6.31 Disposición del acoplamiento entre el motor y el sensor de efecto Hall.

Para realizar el control de la velocidad del motor se ha implementado el sistema de control que presenta la figura 6.32.

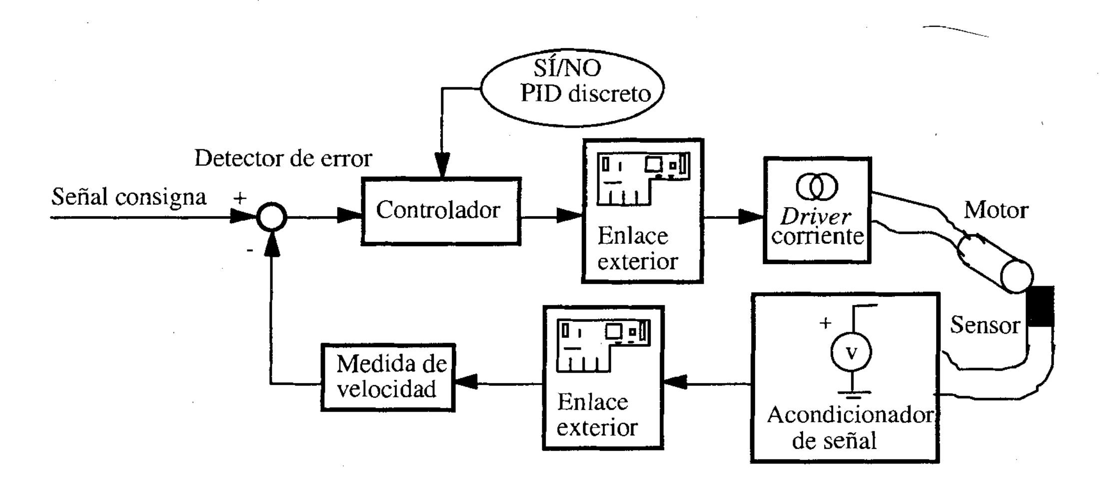


Fig. 6.32 Diagrama de bloque del proceso de control.

Por último, se ha implementado el controlador según las opciones de un control todo/nada o si/no y un control PID. Debe indicarse que la señal de consigna, el detector de error y la medida de velocidad se realizan mediante el software de instrumentación. La figura 6.33 muestra el instrumento virtual correspondiente al controlador PID sobre el que el usuario podrá programar y modificar los parámetros del controlador.

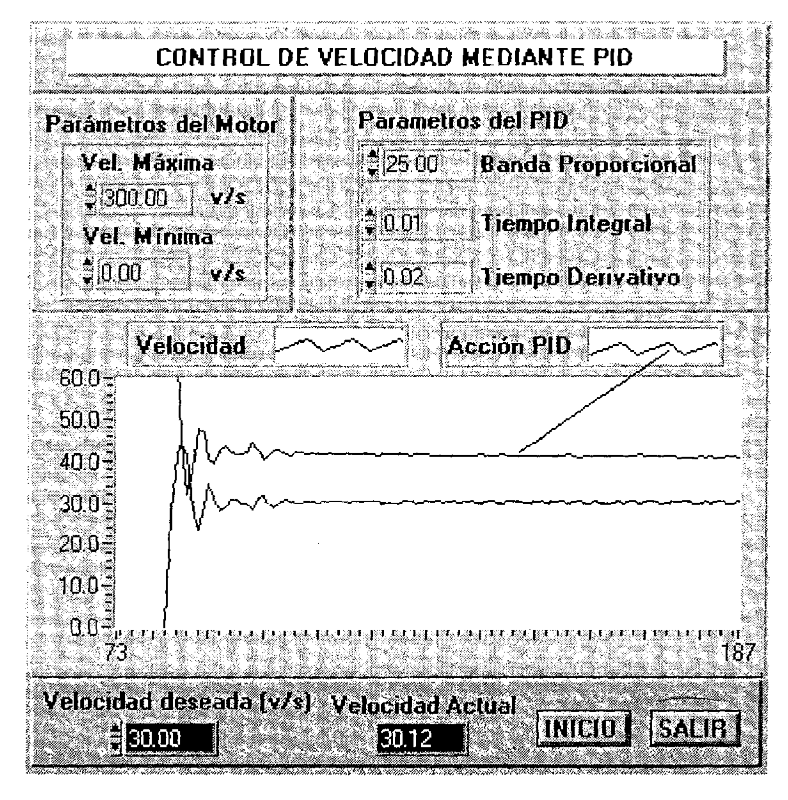


Fig. 6.33 Panel frontal del controlador PID

Bibliografía.

A- Bibliografía general o de consulta.

- Kuo, B. C., *Sistemas de Control Automático*. Prentice Hall. Septima Edición, 1996.
- Ogata, K., *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. Prentice Hall. Segunda Edición, 1996.
- Ogata, K., *Modern Control Engineering. Prentice Hall*. Prentice Hall. Tercera Edición, 1996.
- Dorf, C., Bishop, H., *Modern Control Systems*. Addison-Wesley. Séptima Edición, 1995.
- Van de Vegte, John., *Feedback Control Systems*. Prentice Hall. Tercera Edición, 1994.
- Franklin, G. F., *Control de sistemas dinámicos con retroalimentación*. Addison Wesley. 1991.
- Kuo, B. C., *Digital Control Systems*. Saunders College Publishing. Segunda Edición, 1992.
- Phillips, C. L., Nagle, H.T., *Digital Control Systems. Analisis and Design*. Prentice Hall. Tercera Edición, 1995.
- Nise, N. S., *Control Systems Engineering*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. Segunda Edición, 1995.
- Phillips, C. L., Harbor, R.D., *Feedback Control Systems. Prentice Hall*. Tercera Edición, 1996.
- D'Azzo, J., Houpis, H., *Sistemas Lineales de Control. Análisis y Diseño*. Paraninfo. 1992.
- Min, J. L., *Designing analog and digital control systems*. Ellis Horwood.1988.
- Martins de Carvalho, J. L., *Dinamical systems and automatic control*. Prentice Hall. 1993.
- Hostetter, G. H., Savant, C. J., Stefani, R. T., *Sistemas de control*. Mc. Graw Hill. 1992.

- Milsant, F., *Servosistemas Lineales*. Editores Técnicos Asociados. 1972.
- Biernson, G., *Principles of Feedback Control*. Wiley Interscience. 1988.
- Bateson, R. N., *Introduction to Control System Technology*. Prentice Hall. Quinta Edición, 1996.
- Lewis, P. H., Yang, Ch., *Basic Control Systems Engineering*. Prentice Hall. 1997.
- Paraskevopoulos, P. N., *Digital Control Systems*. Prentice Hall. 1996.
- Rugh, W. J., *Linear Systems Theory*. Prentice Hall. Segunda Edición, 1996.
- Gajic, Z., Lelic, M., *Modern Control Systems Engineering*. Prentice Hall. 1996.
- Brogan, W. L. *Modern Control Theory*. Prentice Hall. 1991.

B- Bibliografía sobre sistemas automáticos en tiempo real.

- Bennet, S., *Real-Time Computer Control. An Introduction*. Prentice Hall. Segunda Edición, 1994.
- Olsson, G., Piani, G., *Computer Systems for Automation and Control*. Prentice Hall. 1992.
- Astron, K. J., Wittenmark, B., *Computer-Controlled Systems. Theory and Design*. Prentice Hall. Tercera Edición, 1997.
- Tien Lang, T., *Computerized Instrumentation*. Wiley and Sons. 1991.
- Creus, A., *Simulación y control de procesos por ordenador*. Marcombo. 1987.
- Williamson, D., *Digital Control and Implementation*. Prentice Hall. 1991.
- Balcells, J., Romeral, J. L. *Autómatas Programables*. Marcombo. 1992.
- Bryan, L. A., Bryan, E. A. *Programable Controllers. Theory and implementation*. Industrial Text. Segunda Edición. 1997.
- Clements-Jewery, K., Jeffcoat, W., *The PLC Workbook*. Prentice Hall. 1996.
- Nekoogar, F., *Digital Control using DSP*. Prentice Hall. 1997.

- Warnock, I. G., *Programable Controllers. Operation and Application.* Prentice Hall. 1989.
- Berger. *Automatización con S5-115U.*
- Manual de sistemas. *Autómata programable S5-90U/S5-95U.* N° de referencia 6ES5-998-8MA41. Edición 03.
- Mayol y Badia, Albert. *Autómatas programables.* Marcombo.
- Mandado, E, Marcos, J., Perez, S.A.. *Controladores lógicos y autómatas programables.* Marcombo. 1992.
- Martinez, Victoriano A.. *Automatizar con autómatas programables.* RA-NA.
- Porras, A., Montanero, A.P.. *Autómatas programables.* Mac Graw Hill.
- Warnack, Ian G.. *Programmable Controllers.* Prentice Hall.
- Downton. *Computadores y microprocesadores.* Addison-Wesley. 1993.
- Peterson, Hill. *Sistemas digitales, organización y diseño de hardware.* Limusa. 1993.
- Shultz, Thomas W.. *C and the 8051. Programing and Multitasking.* Prentice Hall. 1993.
- Pollard, L. Howard. *Computer Design and Architecture.* Prentice Hall. 1990.

C- Bibliografía sobre instrumentación y control.

- Mánuel, A., Sánchez, F. J., Prat, J., Biel, D., Olivé, J. *Instrumentació Virtual. Adquisició, processament i anàlisi de senyals.* Edicions UPC. 1997.
- Johnson, C. D., *Process Control Instrumentation Technology.* Prentice Hall. Quinta Edición, 1996.
- Considine, D. M., *Process/Industrial Instruments and Control Handbook.* Mc. Graw Hill. Cuarta Edición, 1993.
- Natchtigal, Ch. L., *Instrumentation and Control. Fundamentals and applications.* John Wiley and Sons. 1990.
- Webster, Tompkins. *Interface sensors to the IMB-PC.* Prentice-Hall. 1988

D- Bibliografía sobre simulación de sistemas de control.

- Ogata, K., *Solving Control Engineering Problems with MATLAB*. Prentice Hall. 1994.
- Ogata, K., *Designing Linear Control Systems with MATLAB*. Prentice Hall. Segunda Edición, 1995.
- Carvallo, A., Setola, R., Vasca, F., *Practical Guide to MATLAB, Simulink and Control Toolbox*. Prentice Hall. 1996.
- Moscinski, J., Ogonowski, J. *Advanced Control with MATLAB and SIMULINK*. Prentice Hall. 1995.
- Matlab, *Control System Toolbox*. 1990.

Índice



T39/E1/99

Esta edición se terminó de imprimir en junio de 1999. Publicada por ALFAOMEGA GRUPO EDITOR, S.A. de C.V. Apartado Postal 73-267, 03311, México, D.F. La impresión y encuadernación se realizaron en ENCUADERNACION TECNICA EDITORIAL, S.A., Calz. San Lorenzo 279-45, Col. Granjas Estrella, 09880, México, D.F.